

國小階段之數學史素材設計初探

蘇 意 雯

臺北市立教育大學數學系

yiwen@tmue.edu.tw

(投稿日期：2011.5.9；修正日期：2011.6.30；接受日期：2011.7.21)

摘 要

本論文闡述研究者設計國小階段之數學史素材之概況，希望能作為現場教師融入高年級教學之參考。研究者以詮釋學的理念，考量課程標準、數學知識內容及課程編排目的之後，進行數學史料的尋訪，從中選擇出適合之古代數學文本，進而詮釋相關數學思維及理論發展的過程。在文中，除了對所完成的「比率與百分率」及「趣味數學詩」兩份數學史素材設計理念的鋪陳和內涵介紹之外，為了得知本研究所發展之數學史素材的適切性，研究者也以問卷形式，請24名國小在職教師就「適不適合放入國小教材？」等問題提出批判。最後研究者對於此數學史素材設計提出 1.古文對學生仍有一定程度之壓力，故可以翻譯成白話文。2.可多設計與其他領域連結之數學史素材之反思。

關鍵字：國小、數學史、數學詩

壹、前言

九年一貫的數學學習領域中，在協助學童數學智能的發展上提及了數學史的重要性：「在教師教學裡，引進與主題相關的數學史題材，對學童的學習會有很正面的意義，尤其能協助學童將抽象觀念具體化。因為不論在科技應用層面或思想突破方面，數學重要概念的演進確有其實用面的考量，因此提供具啟發性的數學史方面的讀物實屬必要。」(教育部，2008，頁 22)。不過，在教科書的編排上，我們並沒有看到相關主題的歷史情境脈絡，放在教科書裡的數學史素材也是少之又少。是數學史所需的數學先備知識較多，不適合融入國小課程中？還是現成可用之數學史素材太少？不管原因為何，目前缺乏適合國小階段的數學史素材是不爭的事實。雖然臺灣的學生數學成就表現優異，但數學往往是學生討厭科目的首選(教育部統計處，1998)。以 TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) 2007 為例，臺灣八年級學生數學成就位居首位，四年級學生排名第三。但是臺灣學生對數學學習的正向態度及自信心卻明顯低於國際平均成績。

經由少數國小數學史融入數學教學實作，我們發現透過數學史能為學生揭開數學神秘的面紗，讓學生了解數學的起源，也能正面增強他們的數學學習態度(沈志龍、蘇意雯，2009；林妙霜、蘇意雯，2009；蔡幸霓、蘇意雯，2009)。雖然數學史融入數學教學的實施，可以經由介紹數學思維的發展歷史，讓學生體會數學是人類的活動，也能了解數學的發展與社會文化脈絡息息相關，進而開拓學生的視野(洪萬生，2000a；洪萬生等，2009)。但是國小數學史素材搜尋不易，就算教師有心想要實施，第一個面臨的便是素材何處尋的問題。因此，研究者針對現行國小教材相關的主題，搜尋史料並設計融入高年級課程的數學史素材，希望能提供國小教師參考，於數學教學時適當引入。本研究除了詳述數學史素材之設計理念，並經由在職國小教師的檢驗，反思研發數學史素材應該注意的事項，與對數學史融入教學有興趣的教師分享。

貳、數學史與數學教學相關理論

一、運用數學史於數學教學之理念

在數學教學上輔以歷史取向，自從 1970 年代以來已廣受國際數學教育界注意及矚目。所謂的數學史與數學教學的關聯之國際研究群(International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics [HPM])，是指隸屬於國際數學教育委員會(International Commission on Mathematical Instruction [ICMI])的一個研究群，致力於推動數學史與數學教學之關聯。換言之，它是數學史學對數學教育的一種應用，目的是利用數學史的研究成果以及數學史與數學教育的互動，來提升數學教師的教學品質與學生的學習成效。

至於為何要把歷史維度融入數學課程的原因，很多學者均提出看法。例如激發學生在數學上的興趣(Furinghetti & Paola, 2003)、讓我們對於概念和理論有更好的瞭解、對多元文化的珍視、幫助數學學習等(Barbin, 2000; Gulikers & Blom, 2001; Tzanakis & Arcavi, 2000)。綜括來說，以數學史融入數學教學所能達成的目標，可以涵蓋三個範疇，那就是情意、認知及文化活動。那麼實際上，數學史在各國現行的國家課程綱領中，又扮演什麼樣的角色呢？Fasanelli (2000)分析了十六個國家的現行策略，研究者依情意、認知、文化等層面的內容整理如下：

(一) 著重情意相關部分(包含中國、希臘、義大利、荷蘭、波蘭等國家)

引發學習動機，激起學習興趣，藉由數學家傳記啟發學生人格成長。

(二) 著重認知相關部分(澳洲)

幫助學生經由歷史脈絡，了解數學概念發展，藉由文本讓學生比較不同解題方法或思考方向，解放對數學的單一思考方式。

(三) 著重文化活動相關部分(包含巴西、丹麥、法國、紐西蘭、挪威、美國等國家)

經由認識各民族各具特色之數學發展，珍視數學文化性，達成有意義的學習。

承上所述，數學史素材的引用，可以依教學者所需，涵蓋情意、認知及文化活動等面向。接下來所面臨的問題是，有志於 HPM 教學的教師應該如何準備合適的數學史料呢？有關於課堂上所需之歷史素材的準備路徑，Furinghetti 和 Paola (2003) 提出了看法，認為應該先瀏覽數學史文本，然後找出有興趣的時間點或作者，接著尋訪原始典籍，再來才是準備計畫所需之素材。此一流程固然值得參考，但是準備路徑是否為直線進行，就頗值得商榷。因為，對於教師實作而言，常常是由於某一單元的需要，或是想要介紹教科書內所提及之數學家，才開始瀏覽文本、尋找素材。因此，研究者以為這一連串的準備過程，應是雙向遞迴的、是動態的。當尋訪原典時，我們可能又會找出我們所感興趣的另一位數學家，在收集素材時，由於所需的不足，也有可能迫使我们重新再一次瀏覽數學史文本，此處的文本，泛指一些數學史相關的參考資料。當然，這其中很重要的一點是，在搜尋史料的同時，教師所須念茲在茲的，是必須能以批判性地自我檢視文本與 HPM 的可能關係，如此，所編製出來的教材，才能真正落實 HPM 的精神，達到教學的目的。事實上，以 HPM 的施行來看，就如同 Tzanakis 和 Arcavi (2000) 所言，在原典、二手文獻和教學素材三者，教學素材是最為缺乏的。既然教學素材所佔地位如此重要，接下來的篇幅，研究者將針對 HPM 教學素材的開發研究，作詳細地說明。

二、HPM 教學素材的研發及使用

有關 HPM 教學素材的研製，正是本研究的重點。要引起學生的學習興趣，通常最常用的方式就是說故事。從純數學史研究的方向來看，在數學家生平傳記的使用上，不宜只是毫無根據的傳聞軼事，也不可以扭曲傳記的內容，而是應該隨時吸收最新的傳記資料(Pycior, 1987)。至於在數學史融入課堂教學上究竟應如何求全，就需要教師用心的分配與拿捏了。當收集好史料，接下來便是素材的研發了。Hans Freudenthal 主張「引導式的再發明」(guided re-invention)，意即在數學教學時，「我們不應該遵循發明者的歷史足跡，而是經改良過同時有更好引導的歷史過程。」(Freudenthal, 1973, pp. 101, 103)。因此，學生應該有機會用類似於數學事件原始的發展方式，去經驗此數學事件的發展。但此時學生並不是真正的去發明，而是在教師的引導下獲得自己的知識。當研讀數學主題時，我們必須設法找出學生是否可由整合歷史中獲利，由教師安排的歷史素

材中，使學生跟隨著歷史的路徑，瞭解某部分的數學因此被發明，而他們的學習也包含了重新發明這些主題(van Maanen, 2001)。這個方向，正是研究者在設計數學史素材時的參考。

從 HPM 的理念來看，教師可以在數學發展史中，參考與援用與教科書單元有關之適當的歷史素材，讓學生古今觀照，作為「張本例」之用(洪萬生, 2002)。「張本例」通常也被譯成「啟蒙例」。數學教育中的啟蒙例教學，就是指教學時，當學習抽象數學概念時，用具體例子以引動學習。啟蒙例教學概念可包含有「代表性」，就是能正確表達欲教的數學概念，「發展性」，就是能接續在相關概念的學習時所用，還有「易學性」，即能讓學生容易操作，以及「樂學性」，指能引起學生的學習動機等四個屬性(鄭英豪, 2000)。九年一貫課程所強調的十大基本能力中，第六項是促進文化學習與國際瞭解，「認識並尊重不同族群文化，了解與欣賞本國及世界各地歷史文化」。以數學學習領域的「連結」主題來說，在察覺中有一則指標是「C-R-04 能察覺數學與人類文化活動相關」。這正是 HPM 可以擅場之處。在數學課堂上提供數學史料，可以讓學生知道數學是人類的活動，瞭解文化的多樣性和培養多元文化的關懷，而且除了讓學生體會數學的人文面向外，適當的史料剪裁及文本的提供，正可當作數學教學上的範例，幫助學生對於數學重要概念的體會和啟發。

在明瞭了歷史素材的搜尋及準備方式之後，那麼在實作上，教師應該如何使用數學史於數學教學呢？當教師在課堂上運用數學史時，可以使用兩種方式(Menghini, 2000)，一種是舉出方法或是題目，沒有強調出處(implicit use of history)。這是較為簡單的方式，就是僅採用想法，這意味著歷史並不是目標，只是一個教學的計畫的一部份。另一種就是直接使用文本(explicit use of history)，不但告訴學生概念的出處、介紹數學家所處時代的政治、社會、經濟脈絡，並且完全按照歷史的梗概進行。當教師採用後者進行教學時，我們必須考慮上課時間的限制，而且在還原史實時，教師們也要避免對歷史著墨太多，太過跟隨真正的歷史路徑而忽略了現代數學知識的本質。當然，無論以何種方式進行，教師都必須謹記在心的是，不要太過強調歷史面向或造成歷史與數學分開。因為在數學課堂上引進歷史維度的目的，仍是為了幫助數學教學(邱守榕, 2002；洪萬生, 1999)。

在闡述了數學史與數學教學之相關理論之後，研究者將對本研究的設計及進行作一番說明。

參、研究方法

一、研究設計

在數學史素材的設計上，研究者從詮釋學的理念出發，沿用由 Jahnke 的「雙圈」(twofold circle)之概念(Jahnke, 1994)和 Horng (2004)的詮釋學(循環)四面體所發展出來的 HPM 實作之模型(圖 1)(蘇意雯, 2004, 2007; Su, 2006)加以解釋。在此模型中上方的 T 代表教師教學；左圓中 E 代表教科書編者；S 代表課程標準；K 代表數學知識；C 代表教科書內容；右圓中 M 是古代數學家；O 是數學物元；T 是數學理論；下方的 I 則是體會各循環之後的自我詮釋。由 E、S/K 和 C 這三者的循環組成了 C_1 的圓，M、O 及 T 三者的循環則組成了 C_2 的圓。在此模型之架構下，研究者將利用以下的篇幅，對於所選取之兩個高年級數學史素材的設計理念，加以闡釋。

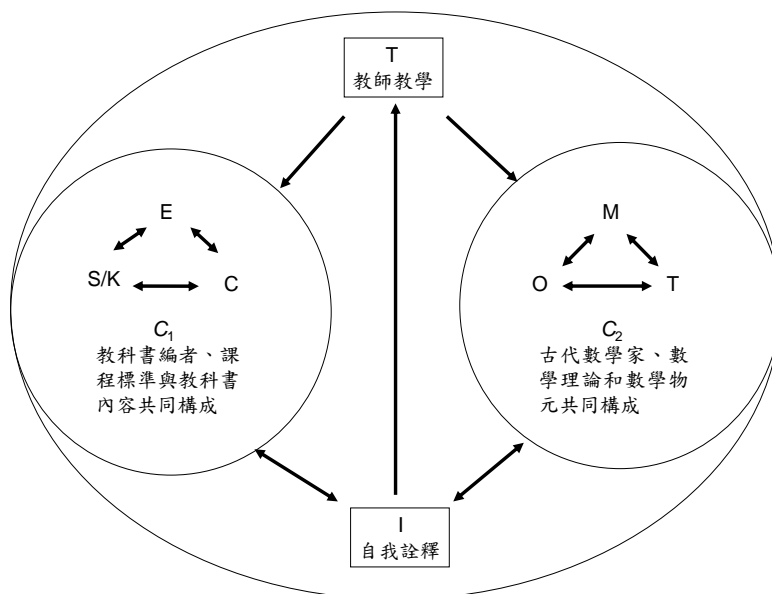


圖 1 HPM 實作之模型

(一)「比率與百分率」數學史素材設計理念

對於「比率與百分率」此一主題，首先研究者搜尋九年一貫課程綱要數學學習領域的相關分年細目，對於此部分所需強調的概念作一整理了解。九年一貫數學學習領域的分年細目 5-n-14 是「能認識比率及其在生活上的應用(含「百分率」、「折」)」。在其後的說明中也提到「比率」是分數課題之一，初步學習的情境強調的是部分佔全體的多寡與其表示法，但是課綱也要求學生要能處理由全部量與比率推得部分量的問題。研究者觀察到現行教科書在此單元數學史素材的缺乏，因此著手整理數學史料。以目前已知中國問世最早的一部數學竹簡著作——《算數書》上的題目為例，除了利用古文本的欣賞，讓閱讀者領略數學風情外，也讓學生解讀題意，練習處理全部量與比率已知推得部分量的問題。另外課綱分年細目 5-n-12 的說明也提到「百分率是最常用的比率表示法，學童應理解其意義、記法與應用。」，因此研究者也在其後安排了百分率記號的發展過程，加深學生的印象。

在 C₂ 循環中，研究者挑選了《算數書》作為本主題切入之數學史文本。此書是於公元 1983 年發現於中國湖北省的張家山漢墓。根據陪葬的一份曆譜記載，是不晚於西漢呂后二年(公元前 186 年)寫成的一部竹簡著作。由於《算數書》是目前僅知的第一部最古老的中國算學文本。這本書的出土，對於中國先秦時期算學風貌的重建非常重要。由於比率相關的問題也出現在這部書中，因此研究者想運用此一數學文本，提供學生領略數學的不同風貌，了解數學是人類的活動，獲得心靈的刺激與拓展。《算數書》是以數學問題集的形式編撰，除了一些運算的條文外，有一些題名下就是呈現出一個算題，而這類算題的主要作用，是幫助學習者在具體的算題舉例中培養出解題的初步能力，以便解決實際生活中所遇到的問題。此外，《算數書》的題名常以題目中重要的幾個字為名，例如編號為 12 的題名就叫一狐出關。本題文字淺顯生動，藉由題目的描述，所涉數學的問題情境歷歷在目，研究者認為能引發學生興趣，也能由實際解題過程領略數學與生活之相關，因此將該題佈置於素材中。

有關百分率數學史素材的援引，主要考量百分率的符號是學生在日常生活常會看到的，但是對於如何演變成今日慣用的符號「%」，這一段發展沿革教科書中往往付之闕如。事實上，用百分率這個詞來表示分母為 100 的分數，是開始於十五和十六世紀的商業算術。因此研究者搜尋資料，向學生介紹這一段演進史，希望能讓學生在百分率學習時能更有感覺，進而能運用於處理日常

生活問題。研究者經過 C_1 和 C_2 兩個圓的循環，再經過自我詮釋之後，便著手編寫「比率與百分率」數學史素材。

(二)「趣味數學詩」數學史素材設計理念

關於趣味數學詩主題的設計，研究者在 C_1 循環上，主要是考量九年一貫的課程綱要有「連結」的主題，此一主題又包含察覺、轉化、解題、溝通與評析等五項。在「察覺」中強調的是，能察覺生活中與數學相關的情境，能察覺數學與其他領域之間有所連結，能知道數學可以應用到自然科學或社會科學中，能知道數學在促進人類文化發展史上的具體例子。「轉化」強調的是能把情境中與問題相關的數、量、形析出、能把情境中數、量、形之關係以數學語言表達出，能把情境中與數學相關的資料資訊化及能把待解的問題轉化成數學的問題。因此，研究者嘗試安排數學詩的素材，讓學生知曉數學知識與人類活動之關聯，也能把詩中的情境轉換成數學題目，能分解複雜的問題為一系列的子題加以求解(解題)，用數學語言呈現解題的過程(溝通)，也能用解題的結果闡釋原來的情境問題(評析)。除此之外，九年一貫課程綱要也強調各學習領域的統整，所以研究者希望尋訪趣味的數學詩以佈置素材，另外並提供之前研究者所搜尋到的乾隆皇帝與紀曉嵐君臣所相互應和之對聯，與本國語文結合，讓學生在語文課程的欣賞中也能挑戰並算出數學答案。

在 C_2 循環中，研究者著手收集相關數學史資料，最後決定從明代數學家程大位(1592)的《算法統宗》一書中擷取所需史料。《算法統宗》在中國古代數學的發展過程中，佔有一席之地，流傳也極為廣泛和長久，對中國在民間普及珠算有很大的影響。明朝末年，這本書還傳入了朝鮮、日本及東南亞各地，對於這些地方傳播珠算，也起了重要的作用。這本書中，有不少的數學詩題屬於簡單的一次方程題目，研究者認為可以要求學生利用算術的算法求出，體會算術和代數的差異，開拓學生的視野。此外，程大位少年時，讀書極為廣博，對書法和數學都很感興趣，一生沒有做官。他從 20 歲起便在長江中、下游一帶經商，因為商業計算的需要，隨時留意數學，遍訪名師，收集很多數學書籍刻苦鑽研，也常有一些心得。大約 40 歲時，程大位回到家鄉，專心研究，除了參考各家學說，也加上自己的見解，於 60 歲時完成他的傑作《算法統宗》。研究者認為這一段利用二十年光陰努力著述完成名作的經歷，也可以和學生分享，讓學生緬懷故人，也能興起「有為者亦若是」的壯志。因此在數學詩之前，安排程大位的生平介紹。研究者同樣經過 C_1 和 C_2 兩個循環，加上自我詮釋之後，著手編

寫「趣味數學詩」數學史素材。

二、資料收集與分析

為了得知本研究所發展之數學史素材的適切性，在數學史素材完成後，研究者請國小在職教師 24 人閱覽，並就「適不適合放入國小教材？」、「若適合放入國小教材，適合於幾年級的學生？哪一個單元？」等問題，寫出理由及評論意見。在研究結果一節中，研究者除了展示所設計之數學史素材之內涵外，並依照在職教師所填寫之意見，對於上述兩份國小數學史素材作一檢驗。

如前所述，研究者以問卷調查方式進行關於此份數學史素材意見的收集。上述的 24 位國小教師，男性教師有 7 位，女性教師有 17 位，平均教學年資約 12 年，而且與大多數的國小教師一樣，之前並不曾經驗過數學史融入數學教學之歷程。在資料的分析中，研究者依照國小教師對於「比率與百分率」及「趣味數學詩」兩份素材內容的意見，進行整理與分析，以原文呈現的方式忠實表達教師填答的本意。編碼方式研究者以第一碼 T 表示教師，第二碼和第三碼代表教師的代號。例如 T17 表示編號為 17 號之教師。

肆、研究結果

在本節中，研究者首先呈現兩份國小數學史素材之設計內涵，之後再以國小在職教師之意見對此數學史素材加以檢驗。以下就兩份數學史素材分別加以詳述。

一、設計內涵

(一)「比率與百分率」數學史素材

公元 1983 年，在中國湖北省的張家山漢墓中，考古學家發現了目前僅知的第一部最古老的中國算學文本—《算數書》。《算數書》是一部竹簡書，根據陪葬的一份曆譜記載，它是不晚於西漢呂后二年(公元前 186 年)寫成的一部竹簡著作。《算數書》的出土，對於中國先秦時期算學風貌的重建非常重要。目前

也有很多的數學史家探討並研究這份數學文本。在過去，中算史家對於先秦時期的數學知識活動，總是利用《九章算術》的內容去做逆溯的外推，現在，依據《算數書》的內容，我們對於《算數書》、《九章算術》與先秦數學三者之間的關係，可以獲得比較具體的觀照角度(洪萬生，2000b)。《算數書》的竹簡共有 190 枚，長 29.6—30.4 公分，寬 0.6—0.7 公分，主要是以數學問題集的形式編撰，除了一些運算的條文外，有一些題名下就是呈現出一個算題，而這類算題的主要作用是幫助學習者在具體的舉例中培養出解題的初步能力，以便解決實際生活中所遇到的問題。《算數書》的題名常以題目中重要的幾個字為名，例如編號為 12 的題名就叫一狐出關，這是一題與比率相關的問題。

狐、狸、犬出關，租百一十一錢。犬謂狸、狸謂狐：爾皮倍我，出租當倍哉。問出各幾何。得曰：犬出十五錢七分六，狸出卅十一錢七分五，狐出六十三錢七分三。術曰：令各相倍也并之七為法，以租各乘之為實，實如法得一。

古時候攜帶貨品出關必須繳交關稅，關於題目的意境，我們不妨想像有三位商人各自攜帶狐皮、狸皮、犬皮出關，三人共繳了 111 錢的關稅。帶犬皮的商人對帶狸皮的商人，帶狸皮的商人對帶狐皮的商人說「你所帶的毛皮的價格是我的兩倍，因此你也要繳交兩倍的關稅！」，請問三人的稅金要如何分配？這是一題簡單的比率問題，只要明瞭題目的意思，很快就可以知道帶犬皮的商人應繳全部稅金的 $\frac{1}{7}$ ，帶狸皮的商人應繳全部稅金的 $\frac{2}{7}$ ，帶狐皮的商人應繳全部稅金的 $\frac{4}{7}$ ，答案也就呼之欲出了！古代中國數學文本所呈現的風貌是提出問題，接著是答案，之後的術文，便是說明解題的方法。

至於用百分率這個詞來表示分母為 100 的分數，是開始於十五和十六世紀的商業算術。當時用百分之多少表示利率非常普遍，而這樣的習慣也在商業中保留下來，並進一步在以「元」和「分」(元的百分之一)為基礎貨幣系統的國度中被強化。如此也確保了百分率的使用，使之成為十進位算術一個特別的分支。百分率的符號經歷了好幾個世紀的演進，大約在西元 1425 年時，首先是手寫成「per 100」，然後到了西元 1650 年逐漸變成「per $\frac{0}{0}$ 」，之後再簡化成「 $\frac{0}{0}$ 」，最後就變成今日我們所慣用的符號「%」(Berlinghoff & Gouvea, 2004/洪萬生、英家明暨 HPM 團隊譯，2008)。

(二)「趣味數學詩」數學史素材

數學也可以成詩嗎？公元 14 世紀到 17 世紀初約三百年間，中國數學明顯的特點，就是從事高深的理論研究幾乎停頓，日常應用的算術和珠算得到普及，形成詩歌及口訣化，這種情況其實與當時商業等廣泛社會需要息息相關，這一段時期可稱為商業數學普及時期。程大位是明代珠算家。少年時，讀書極為廣博，對書法和數學都很感興趣，一生沒有做官。他從 20 歲起便在長江中、下游一帶經商，因為商業計算的需要，他隨時留意數學，遍訪名師，收集很多數學書籍刻苦鑽研，時常會有一些心得。大約 40 歲時，程大位回到家鄉，專心研究，除了參考各家學說，也加上自己的見解，於 60 歲時完成他的傑作《算法統宗》(1592)。這本書中有 17 卷，記載了非常詳備的珠算知識，作者自序稱「參會諸家之說，附以一得之愚，纂集成編。」。在中國古代數學的發展過程中，《算法統宗》是一部十分重要的著作，流傳極為廣泛和長久，對中國在民間普及珠算有很大的影響。明朝末年，還傳入了朝鮮、日本及東南亞各地，對於這些地方傳播珠算也起了重要的作用。萬曆二十六年(1598)，程大位對《算法統宗》進行刪減，取其切要部份，另編為《算法纂要》四卷。

《算法統宗》一書中有不少數學詩題屬於簡單的一次方程題目，可以要求學生利用算術的算法求出，體會算術和代數的差異，開拓學生的視野。例如僧分饅頭歌「一百饅頭一百僧，大和三個更無爭，小和三人分一個，大小和尚得幾丁。」題目的意思是有一百個和尚和一百個饅頭，大和尚一人吃三個饅頭，小和尚三人吃一個，請問大小和尚各得多少個饅頭。答案是「大和尚二十五人，分得饅頭七十五個。小和尚七十五人，分得饅頭二十五個。」這個題目用算術解法，可以用 $100 \div (3+1) = 25$ ，得到大和尚 25 人，饅頭數 75 個，小和尚的部份也就顯而易見了。當然本題用代數解法，設大和尚有 x 人，小和尚 $(100-x)$ 人，列出 $3x + \frac{(100-x)}{3} = 100$ 之後，再求解也很快，適合小朋友腦力激盪。還有一題「書生分卷歌」，講的是在古代的書院裡，一群學生搖頭晃腦的在讀書，他們讀些什麼書呢？有《毛詩》、《春秋》和《周易》三種書籍，因為書籍不夠，所以只能 3 個人共讀一本《毛詩》，4 個人共看一本《春秋》，5 個人共讀一本《周易》。現在已經知道這三類書籍一共有 94 本，想要知道學生總共有多少人。在動腦筋之前，首先讓我們先欣賞一下原詩：

毛詩春秋周易書，九十四冊共無餘。
毛詩一冊三人共，春秋一本四人呼，
周易五人讀一本。要分每樣幾多書，
就見學生多少數，請君布算莫躊躇。

這道題可以用 x 代表學生的人數，那麼因為 3 個人共看一本毛詩，所以毛詩就有 $\frac{x}{3}$ 本，同樣的道理，春秋有 $\frac{x}{4}$ 本，周易有 $\frac{x}{5}$ 本，題目已經告訴我們毛詩、春秋、周易三種書共有 94 本，所以我們可以列出 $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 94$ 這個式子。到了清朝，也出現過饒富興味的對聯，「花甲重逢，外加三七歲月。古稀雙慶，更多一度春秋。」這是乾隆皇帝和紀曉嵐所對，指涉的是參加千叟宴的賓客中，最大長者的年紀(徐品方，1997)。上下聯所題的年歲應該相等，上聯是 $60 \times 2 + 21 = 141$ ，下聯也是 $70 \times 2 + 1 = 141$ 。九年一貫強調各學習領域的統整，「學習領域之實施，應掌握統整之精神，並視學習內容之性質，實施協同教學。」(教育部，2008)。此副對聯正適合與本國語文結合。因為要先知道花甲、古稀所代表的意含，以及三七歲月是三個 7 年，也就是 21 年，就像二八佳人是指 16 歲的少女一樣。讓學生在語文課程的欣賞中能算出數學答案，動手挑戰數學詩，是一個可行的選擇。

二、素材檢驗

以下的篇幅，研究者將針對在職教師閱覽數學史素材後所填答之意見，進行整理歸納並加以分析。

(一)大部份的在職教師們表達對古文本直接教學的恐懼，認為古文本會對學生造成閱讀障礙

例如

- T17：狐出關問題如要應用在小學教學中，必須先改寫成活潑的故事以利學生理解題目。
- T21：這題需要抽象思考能力佳的小朋友才能理解。不適合放入國小教材，但可以作為「加深題」或列入「資優難題」。
- T11：應該敘述地明確且易懂，才能達到學習目標
- T06：不應再納入狐出關問題，且本題為文言文。

T22：較不宜放入國小教材中，以已有古文基礎的國中生應更為適合

T01：雖經老師以白話文解說，但解說冗長，小學生通常缺乏耐性，故不適合放入小學教材。

T19：這份史料文字較難懂，若要使用，應先翻譯成有趣的故事或動畫，讓學生體會古人就有按比例分配的故事，藉以引發學生的學習動機。

不過當中 T18 與大家持不同的看法，她的考量是：

T18：算數書中孤出關問題是為解決實際生活中的關稅問題，因此本人認為此例也適合融入教師教學中，唯時機點應置於比率概念已教授完畢，學生對於比率概念已有相當程度了解後，呈現給學生作為腦力激盪練習，一來可讓學生欣賞中國古代數學風貌，二來也讓學生了解數學在實際生活情境中的應用(特別因此例牽涉到錢的問題，可讓小朋友知道如果數學知識不足可能會吃虧)，故此例相當適合融入教師教學中。

由以上教師們的看法，可以得知大部分教師都認為學生對於古文本會有閱讀上的障礙，也建議必須翻譯成故事或動畫，才能引起學生動機。研究者佈置此份素材的原意是先呈現古文，讓學生領略數學文本之風華，其後再進行情境解說，讓不懂題意的學生能經由解說看懂原文，進而嘗試解題。但是這樣的方式，教師們認為比較屬於腦力激盪練習，或是「加深題」與「資優難題」。因此，或許在古文本的編排上，先呈現故事情境，翻譯成白話文內容，然後再藉由說明帶入古文本欣賞是日後設計可以參考的方式。

(二)對於百分率的史料，多數教師持肯定的態度

例如：

T07：學生更能理解%是定義在百分之一($\frac{1}{100}$)的情況下。對於百分率的運算也較不會混淆及出錯了。

T11：在百分率的部份，明確地講述了%的由來，使學生了解並產生熟悉感，故適用於六年級『百分率』單元的學習。

T06：大家皆知%的意義，卻不知它從何而來，故此時將%的沿革納入課程中，必能吸引學生且幫助理解。

T22：百分率例中，細述了百分符號%的來由，真的能讓學習者加深印象，並應較不易忘記它吧！以前帶過類似單元，書寫時，孩子總是常常忘記將%書寫上，若能在

教學中引入這個數學史例，我想孩子會更清楚 25 與 25% 的差別吧！因之，我認為此部分非常適合放入國小教材中。

T15：百分率可作為引起動機，因為從百分率的起源、符號的演變，到現在使用的%，作一完整的介紹，可讓學生更熟悉這一抽象的符號%，也讓學生經驗現今符號的使用不單單只是操作型定義，而是累積了許多前人的歷史、文化和智慧才得此一珍貴的抽象符號。

T05：百分率表示分母為一百的分數，從 $\text{per } 100 \rightarrow \text{per } \frac{0}{0} \rightarrow \%$ ，了解符號演變的過程就不會覺得%這個符號這麼抽象難懂了。

T02：百分率的符號演變對於學生而言，可說是具有加深符號%的認知效果。放在百分率單元中可用來引起學習動機。

T20：百分率的演變方式讓孩子認識了多元的記錄方式，了解商業上基礎貨幣系統是如何被使用，更知道所有的數學記錄都是因著人們的需求，而記錄的更方便。如同中國的文字演變，從甲骨文→金文→小篆→楷書，了解人類各個時期算學風貌。

從以上教師們的回饋，呼應了數學史融入數學教學的用意，那就是透過對數學文化遺產的緬懷、追溯、獵奇與探索，讓學生得以認識古算家的數學思維與發展軌跡，進而領會文化交融的啟發與創意，並能知曉數學知識與人類活動之關聯。因此，對於國小相關數學符號或是數學概念的源起，若能加以整理並適度介紹，應該能對學生有所幫助。

(三)大部分在職教師肯定「趣味數學詩」素材適合放入國小高年級課程

例如：

T18：《算法統宗》中大小和尚一題，以算術解法適於融入高年級『怎樣解題』單元，教師可用圖解法引導學生思考並列式求解...，對聯當中包含乘法及四則運算概念，屬國小階段應備能力，加上其內容不長，也饒富趣味(因國語課本有介紹過機智的紀曉嵐)，因此也相當適合融入教學中。適用於五年級怎樣解題及整數的四則運算單元。

T20：詩歌、口訣化對孩子認識及記憶都有正面的加分作用，...程大位的傑作《算法統宗》之數學詩題，布題生活化，趣味化，很能引起學童興趣。

T22：僧分饅頭可由算術求得答案，亦可藉由代數來解，此題目曾經出現在我某一年任教六年級時的某次段考加分題中，出題老師用白話方式呈現題目，有趣的是，多半的學生都解出來了，但方式則不一。平常數學表現較佳的孩子多由代數方式解

出，事後問學生的感覺，他們皆說此題很有趣，解出後更有成就感呢！故我認為此題適合放入國小六年級「怎樣解題」單元。

T01：僧分饅頭歌適合放在小學教材，因歌詞簡短，容易理解題意，且算式簡單， $100 \div (3+1) = 25$ ， $100 - 25 = 75$ ，數字不大。

T10：明代珠算家程大位和數學的結緣，源於生活中實際的商業活動之需要，而引起其對數學的興趣及研究探索之歷程，很值得向學生介紹。尤其，因生活需求引起其接觸、了解和重視，而至 40 歲鑽研，甚至 60 歲還完成《算法統宗》，這樣的求知精神，很值得學生學習。因此融入「趣味詩」，教學之始，用以引起動機，十分恰當。此部份，適合中高年級，提升其學習情意的學習動力。

雖然與「狐出關問題」同為古文，但可能由於「趣味數學詩」以詩體或對聯方式呈現，再加上這份素材內容不論是分饅頭或是猜年紀，都讓教師認為學生比較能接受吸收，也能引起他們的興趣和共鳴。至於介紹數學家的生平事蹟，更可以興起向大師學習的壯志，以及「有為者亦若是」的豪情，因此得到教師們的肯定，認為適合放入高年級課程。

(四)多數教師認為「趣味數學詩」此份素材可與國語領域連結

例如：

T20：除了數學內部的連結，貫穿數與量與代數主題之外，強調了解題能力的培養，在外部連結上則強調了生活及國語文、生活領域、數學領域的轉化，解題、溝通諸能力，掌握了統整的精神，學生更可進一步挑戰數學詩的擬題能力培養，提高數學素養，有更完整的認知。

T13：對聯配合乘法加法，讓小朋友欣賞中國文學中所含的數學是可行的，可以從文字中學到算術，讓學生會有新鮮感，體會數學不是硬梆梆的，也可以是很有文學氣質。

T16：可以結合語文領域的閱讀：讓學生試著閱讀原文，在部分字詞，給予解釋，培養其欣賞古文及猜測的能力，答題後可再共同討論，訓練其面對未知文章時，如何搜尋關鍵字回答問題。

T11：在對聯詩中有「花甲」、「古稀」等古文部份，對六年級的學生有引導入古文的作用，可和其他領域作結合，又能解題，可謂一舉兩得。

T03：高年級已漸漸認識簡易古文，拿趣味詩來引導，不只讓學生了解簡易古文也可同時解數學問題，達到統整的效果，既有趣又可達到學習成果，一舉二得。

T10：清乾隆和紀曉嵐於千叟宴之對聯，十分適合加入小學課程，尤其小四至小六皆可。因為其中三七歲月代表三個七年，就代表先有國語的相關知識，才能從此對聯中找出其蘊藏之數字，並予以解題，的確符合九年一貫中的「連結」概念，是很棒的課程設計。

T24：九年一貫強調不同領域的統整和跨領域之學習，其精神是值得嘗試的。融入趣味數學詩，於小學教材中，教師扮演著相當重要的角色，但學生對於古文的學習仍未純熟，「花甲」、「古稀」等用詞仍需教師的解釋與引導，如果是將其應用於學習動機的引發，我認為高年級的孩子是可以接受與理解的。

在國小階段，閱讀能力的培養相當重要，之前的研究顯示出科學讀物的閱讀能使學生獲益(洪敏怡、黃萬居、彭彥璟，2008)，在本研究中，與國語領域連結的數學史素材剛好也可以成為學生多元閱讀的文本，如此不但達到九年一貫各學習領域統整的目標，也呼應了培養閱讀能力的要求。這是數學史素材研發的努力方向，除了符合連結主題的需求，讓學生知曉數學知識與人類活動之關聯，轉換情境成數學題目再加以求解，用數學語言呈現解題的過程，能用解題的結果闡釋原來的情境問題，也希望能顧及與其他領域的統整，讓數學的學習更為豐富。

(五) 少部分教師考量教學時數的限制問題

例如：

T21：我認為以國小的能力，是無法做到，但若只是純欣賞，若時間允許，是會提供給學童欣賞。

T02：一切皆得在教學時數充足下，教學效果會更好。

也有教師建議此份素材可以放入數學社團：

T06：針對對數學有興趣的學生，另開數學社團，作為上課的材料，必能對學生有很大的助益。

上述教師對於時數限制的憂慮，與研究者之前在社區大學分享 HPM 教學經驗，與會教師表示：「數學史的介紹可以引發學習動機，使教學活動更為生動活潑，但就目前自己的教學經驗，時間上的限制是一個很大的問題，若是將數學史放在社團、選修課上使用，效果應該會很好吧！」以及「數學史可應用於社團活動上，一般教學活動用到機會不多，因為要花很多時間。」(蘇意雯，2005)不謀而合。事實上，HPM 教學並不是與數學

課程分開，純粹歷史的講授。教師若能針對某一適合的單元，將所搜尋之史料與課程結合編製成數學史學習工作單，在課堂中實施，對於學生的學習態度可以有顯著正面的影響(沈志龍、蘇意雯，2009；林妙霜、蘇意雯，2009；蔡幸霓、蘇意雯，2009)，若是時間不足，教師稍加提示數學史學習工作單內容，發下去讓學生自行研究，過些時日再進行討論也是一個可行之道(蘇意雯，2005)。至於更進一步將數學史融入數學社團，研究顯示對於學生也可以有所幫助(陳世智，2009)。

伍、結論

本研究以「比率與百分率」和「趣味數學詩」兩個主題，設計國小高年級數學史素材，並闡述研究者設計數學史素材之理念。完成素材設計之後，透過對在職教師的問卷，收集在職教師們對於所完成之數學史素材的意見並進行分析。經過了數學史素材的設計及在職教師的檢驗，研究者對於國小階段數學史素材的設計，有如下幾點反思：

一、古文對學生仍有一定程度之壓力，故可以翻譯成白話文

研究者所設計之兩份素材，皆由古文本直接呈現，趣味數學詩以詩體呈現，閱讀者較不陌生，而且文字淺白，因此能激起在職教師之共鳴。但是對於「狐出關」一題，則造成在職教師的恐懼與擔心。因此研究者認為在數學史素材的設計上，為了讓學生欣賞古文本的風華，可以適度用原文呈現，但在古文上方不妨放入白話文的解釋，或用故事情境體現，減少閱讀者的畏懼。

二、可多設計能與其他領域連結之數學史素材

經由本文分析，可以得知在職教師對於能與其他各領域連結的數學史素材多有所肯定，在這樣的進路下，所設計之素材不僅能關照數學知識也能觸及數學與其他學科或生活上的連結，可以引起學生更大的共鳴。例如 T18 由於認為「《算法統宗》中大小和尚一題，以算術解法適於融入高年級『怎樣解題』單元，教師可用圖

解法引導學生思考並列式求解」，因此在日後的教學中曾嘗試與學生分享本題，並鼓勵學生從算術及代數兩種角度加以思考，盡可能輔以圖形表徵。據 T18 表示，這樣的教學得到全班 94% 的學生的肯定。因此，設計可連結其他領域的素材，或可成為有心從事數學史素材設計者努力的目標。

本篇論文闡述研究者所設計數學史素材之理念及內涵，並藉由在職教師對於所完成之數學史素材的批判所引發之反思，提供有心從事數學史教材設計者參考。希望經由大家的群策群力，充實國小階段的數學史素材資料庫，以利在職教師授課之用，一齊為提升學生學習數學之興趣而努力。

參考文獻

- 沈志龍、蘇意雯(2009)。當動畫與學習工作單相遇—數學史融入國小數學教學之實作研究。**教師天地**，163，70-77。
- 邱守榕(2002)。數學史與數學教育史在數學師資教育改革中的實質作用：史實與史觀對數學活動設計與分析的啟示 (NSC89-2511-S-018-010、NSC90-2521-S-018-002)。臺北市：行政院國家科學委員會。
- 林妙霜、蘇意雯(2009)。數學史讓數學變有趣。**師友月刊**，509，81-83。
- 洪敏怡、黃萬居、彭彥璟(2008)。閱讀科學讀物對國小五年級學童批判思考能力與問題解決能力的影響。**科學教育研究與發展季刊**，51，1-33。
- 洪萬生(1999)。HPM 隨筆(二)：數學史與數學的教與學。**HPM 通訊**，2(4)，1-3。
- 洪萬生(2000a)。《無異解》中的三案初探：一個 HPM 的觀點。**科學教育學刊**，8(3)，215-224。
- 洪萬生(2000b)。《算數書》專輯說明。**HPM 通訊**，3(11)，1-2。
- 洪萬生(2002)。中算史中的「張本例」。**HPM 通訊**，5(12)，1-3。
- 洪萬生、英家明暨 HPM 團隊(譯)(2008)。溫柔數學史：從古埃及到超級電腦(原作者：W. P. Berlinghoff, & F. Q. Gouvea)。臺北市：博雅書屋(原著出版年：2004)。
- 洪萬生、英家銘、蘇意雯、蘇惠玉、楊瓊茹、劉柏宏(2009)。當數學遇見文化。臺北市：三民書局。
- 徐品方(1997)。數學詩題解。臺北市：明文書局。
- 陳世智(2009)。數學史融入國小五年級社團數學教學之個案研究(未出版之碩士

- 論文)。臺北市立教育大學，臺北市。
- 教育部統計處(1998)。「臺灣地區中等以下各級學校學生學習及生活概況調查(86學年第一學期)」之調查結果。臺北市：教育部。
- 教育部(2008)。國民中小學九年一貫課程綱要。臺北市：教育部。
- 蔡幸霓、蘇意雯(2009)。數學史融入國小數學教學之實作研究—以分數乘、除法為例。臺灣數學教師(電子)期刊，2，2-13。
- 鄭英豪(2000)。學生教師數學教學概念的學習：以「概念啟蒙例」的教學概念為例(未出版之博士論文)。國立臺灣師範大學，臺北市。
- 程大位(1592)。算法統宗。載於郭書春主編中國科學技術典籍通彙數學卷第二分冊(頁1217-1421)。鄭州：河南教育出版社。
- 蘇意雯(2004)。數學教師專業發展的一個面向：數學史融入數學教學之實作與研究(未出版之博士論文)。國立臺灣師範大學，臺北市。
- 蘇意雯(2005)。淺談 HPM 學習工作單之設計。臺灣數學教師(電子)期刊，2，2-13。
- 蘇意雯(2007)。運用古文本於數學教學—以開方法為例。臺灣數學教師(電子)期刊，9，56-67。
- Barbin, E. (2000). Integrating history: Research perspectives. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education* (pp. 63-90). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Fasanelli, F. (2000). The political context. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education* (pp. 1-38). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
- Furinghetti, F., & Paola, D. (2003). History as a crossroads of mathematical culture and educational needs in the classroom. *Mathematics in School*, 32 (1), 37-41.
- Gulikers, I., & Blom, K. A. (2001). 'A historical angle', a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 223-258.
- Hong, W. -S. (2004, July). *Teacher's professional development in terms of HPM: A story of Yu*. Paper presented at the HPM 2004, Uppsala, Sweden.
- Jahnke, H. N. (1994). The historical dimension of mathematical understanding: Objectifying the subjective. In J. P. da Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings*

- of the 18th international conference for the Psychology of Mathematics Education, vol. I* (pp. 139-156). Lisbon: University of Lisbon.
- Menghini, M. (2000). On potentialities, limits and risks. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education* (pp. 86-90). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Pycior, H. (1987). Biography in the mathematics classroom. In I. Grattan-Guinness (Ed.), *History in mathematics education* (pp. 170-186). Paris: Société française d'histoire des sciences et des techniques .
- Su, Y. -W. (2006). An action research of school-centered professional development in the HPM context. In F. Furinghetti, S. Kaijser, & C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of the HPM 2004 & ESU4* (pp. 368-382). Uppsala: University of Uppsala.
- Tzanakis, C., & Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education* (pp. 201-240). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Van Maanen, J. (2001). Research on history in mathematics education in the Netherlands: The “reinvention studies”. In F. -L. Lin (Ed.), *Proceedings of the Netherlands and Taiwan conference on common sense in mathematics education—Common sense in mathematics education* (pp. 191-202). Taipei: National Taiwan Normal University.

An Initial Investigation into the Design of Materials of History of Mathematics for Elementary School Education

Yi-Wen Su

Department of Mathematics, Taipei Municipal University of Education

yiwen@tmue.edu.tw

Abstract

This paper describes how the researcher proceeded with the design of the materials of history of mathematics for elementary stage; and is meant to help the in-service teacher integrate history of mathematics into high grade teaching. With the ideas of hermeneutic, after considering the standard of curriculum, mathematics contents as well as the purpose of textbook designing, the researcher developed the materials in a hermeneutic way. The researcher started to search for the materials of history of mathematics and then chose suitable text among ancient books on mathematics to interpret the development of mathematics-related thoughts and theories. In addition to giving a general presentation and introduction to two completed themes of design concepts, that is, “proportion and percentage”, and “funny math poetry”, the researcher also used some questionnaire, raising question like “Are the materials suitable for elementary stage?”. Then the researcher asked for 24 elementary in-service teachers to make comments based on the questionnaire so that it would be easier to find out to what extent the material can be used and what revision shall be required. At last, regarding the design of materials of history of mathematics, the researcher suggested the following points: (1) The ancient writings tend to put a certain degree of pressure on the modern students as the students would have difficulty understanding the meaning of these writing completely. To solve this problem, it would be better to convert them into plain language used today. (2) We can design more materials of history of mathematics which are able to connect other curriculum domain.

Keywords: elementary school, history of mathematics, mathematics poetry

