

「Balancing Act」活動融入國小二年級 數學教學之探討

李佩蓉¹ 楊德清²

國立嘉義大學數學教育研究所 (投稿日期: 96 年 3 月 5 日; 修正日期:
96 年 4 月 23 日、9 月 27 日; 接受日期: 96 年 10 月 16 日)

摘要

本研究的主要目的乃是探討美國 Navigating through Algebra in Prekindergarten -Grade2 之「Balancing Act」教材融入台灣數學課室之教學歷程。研究者以所任教之二年級學生為對象，進行四節課的補充教學活動，並透過觀察教學錄影中的師生互動及學習單的習寫，來探討其教學歷程。

研究結果指出藉由天平的教學活動，可以引導孩子發現不同物體彼此之間的重量大小關係，並從中發展遞移律之概念。另外還能更進一步運用天平兩邊達平衡狀態時的特性，培養低年級學童建立基礎的等量加減法公理。從本研究之教學過程中亦發現，1) 解開放式問題對小二學生而言是較困難的，因此需要較多的引導與協助；2) 利用生活上的真實情境作為比喻，可幫助學生體會抽象的代數意義，成功發展遞移律的概念。

關鍵詞: 天平、代數、等量加減法公理、二年級

壹、前言

「代數」雖是國內現行九年一貫數學領域課程之重要教學主題之一，但由於其敘述方式是一種較抽象形式的語言，而這種抽象性的本質通常容易形成一般人學習數學的主要障礙(教育部, 2003)。許多研究亦指出，甚至對於青少年而言，他們還是很難輕易去抓住解方程式所需要的基礎邏輯、原則 (Filloy & Rojano, 1989)。國內的九年一貫課程綱要(教育部, 2003)指出在二年級時學生宜從具體情境中學習遞移律A-1-01)，但等到第三階段學生才學習理解並應用等量公理的代數概念 (A-3-02)。由於文字符號是學習代數的一個難關(教育部, 2003)，因此研究者使用美國國小二年級之教材，在不引入抽象符號表徵之方程式的前提下，運用天平的特性來進行教學活動，幫助低年級學童培養相關之基礎代數先備概念。如：1.天平平衡時，代表兩邊重量相等；2.天平平衡時，兩邊離散量物體之重量等價；3.天平平衡時，兩邊同時進行等量加或減量時，不影響其平衡 (Schliemann, Lessa, Lima, & Siqueira, 2007)。希望能藉由此經驗為低年級學生鋪路，以幫助他們在未來能順利展開學習代數的另一起點。基於上述之論點，本文之目的為探討天平活動融入小二課程，以協助學生發展遞移律及等量加減法公理之概念之教學歷程。

貳、天平所扮演的角色

以下表1 就天平於兩套教材所扮演的角色，依每個教學單元之教學目標、課程編排之教學理念、教學活動內容，來做進一步說明。

表1 台灣與美國天平教學單元分析表

	台灣康軒版	美國Navigating through Algebra in Prekindergarten-Grade2
單元名稱	比比看	Balancing Act
適用年級	二年級上學期	Prekindergarten-Grade2
學生先備知識	有拿物或舉物的經驗玩過蹺蹺板	若天平呈現平衡狀態，是表示天平的左右兩邊一樣重
教學目標	1.能認識重量，並做直接比較(1)透過視覺或其他感官，做兩物間重量的直觀比較。(2)使用天平，直接比較兩個物體的重量大小2.能經由間接比較認識遞移律，找出三個物體之	1.瞭解天平的平衡關係所代表的意義2.可指出積木間的等重關係，並找出物體間的重量大小關係3.瞭解天平的兩邊若同時加(減)
	間的重量大小關係(甲>乙，且乙>丙，則甲>丙) (甲=乙，且乙=丙，則甲=丙)	相同的重量將不會改變其原來的輕重關係，以發展等量加減法公理之概念。4.用數值取代變異量5.發展遞移律概念先分別直接比較兩個量，再透過媒介量作間接比較，找出三個物體之間重量大小順序。
教學理念	著重於各物體間重量大小的比較，並介紹遞移律	重量的比較、介紹遞移律、等量公理的建立

教學活動內容	1.先經由目測、再用手掂掂看等直觀的感受，來估量生活中的物品到底哪個重？哪個輕？讓學生了解在比較東西的重量大小時，如果只用眼睛觀察，所得到的結果不一定會完全正確2.使用天平來比較牛奶和果汁兩個外觀不同物體間的重量。(例)牛奶和果汁、芭樂和火龍果3.在「學習廣角」延伸活動中，觀察課本圖片中的情境，先分別直接比較兩個量，再經由間接比較，找出三個物體之間的重量的關係，建立遞移律的概念。	1.當天平兩邊達平衡狀態時，如果在兩邊秤盤上同時各加放或拿走相同重量，則天平會如何？學習等量加減法公理之概念。2.給定一邊的重量，讓學生判斷欲使天平達到平衡，可以在另一邊放什麼積木。3.從已知的平衡關係中判斷兩個積木中何者較重。4.已知一邊的重量數值，更進一步求出另一邊物體的重量。5.透過媒介量作間接比較圓柱、球體、正方體三個物體之間何者是最重的？建立遞移律的概念
--------	---	---

(一) 兩單元綜合分析比較

說到天平，閃入腦海裡的第一個印象就是可以用來判斷重量的大小。從表1可以發現，台灣低年級版的教科書（以康軒版第三冊「比比看」教學單元為例）著重於教導學生如何使用天平來比較「物體的重量大小」，並經由間接比較來介紹遞移律。相對而言，美國Navigating through Algebra in Prekindergarten-Grade2 (NCTM, 2001) 這套教材為同年齡階段學童所設計的「Balancing Act」教學單元中，除了讓學生藉由天平的平衡活動去發現不同物體彼此之間的重量的大小關係之外，更巧妙利用此先備知識當成教學切入點，培養低年級學童建立基礎的等量加減法公理概念 (Cortes, Kavafian, & Vergnaud, 1990; Filloy & Rojano, 1989)，企圖以天平作為開啓代數之鑰，作為學生日後學習基礎代數之前置經驗。對低年級學生而言，這的確是相當有趣的學習經驗。

(二) 代數相關研究

許多教育研究學者(Davydov, 1991; Mason, 1996; Kaput, 1998; Brown & Coles, 2001; Crawford, 2001; Warren, 2001) 支持代數教學應該加入國小數學課程中，且相關研究(Ainely, 1999; Bellisio & Maher, 1998; Slavitt, 1999; Smith, 2000) 指出國小階段學童經過教學後，對代數的推理和符號的使用都能有良好的學習成效。NCTM(2000) 亦主張代數或先備代數概念可以在國小階段進行教學，以建立孩子的基礎代數能力。由此可知，於國小階段進行代數教學已受到大家的矚目。

但代數教學是否可以融入小學低年級課室中？美國NCTM(2000) 支持代數推理應從幼稚園就開始教起；Davis(1989) 認為代數應該從小二或小三就開始準備起；而Davydov(1991) 更是主張基礎的代數概念教學可從小學一年級開始。此外，Bodanskii(1991) 的研究結果亦發現從小一就接受代數教學的學生，在代數解題上有較良好的表現。換句話說，代數融入低年級數學課室的教學應是可行的。

然而，正式引入抽象代數符號概念前，什麼樣的先備代數概念應在低年級教導呢？Schliemann等人(2007) 提及當小學生初步學習代數概念時，對“相等”(equivalence) 的認知是很重要的，亦即當“等號”(=)兩邊同時加(減)相同的重量將不會改變其原來的輕重關係，將有利於發展等量加減法公理之概念。但看似簡單的基本概念卻是許多青少年學習困難的地方(Filloy & Rojano, 1989)。由NCTM 所出版的Navigating through Algebra in Prekindergarten-Grade2 (NCTM, 2001) 教材中的「Balancing Act」單元即讓二年級學童在踏入正式抽象代數教學前，不僅學習遞移律且發展等量加減法公理等先備代數概念，這是目前國內教材中尚未出現的。因此，本研究將「Balancing Act」單元實施於台灣小二課室中，期望研究結果能提供未來國內代數課程進行改革時作為參考。

本研究以實務觀點為主來探討教學活動之歷程，因此採取個案研究法進行研究，資料之來源

包括教學過程之錄影、學生學習單、教師省思札記以及研究者之教室觀察等不同的資料。資料分析之過程則透過人員及資料來源的三角檢定，以確保研究結果的客觀性。在人員的三角檢定方面，透過研究者和研究參與者之不斷討論與修正，共同檢視資料分析的適當性，而資料來源的三角檢定，則是藉由教室現場錄音錄影之轉譯、研究者省思札記、學生的活動學習單、研究者之教室觀察等不同的資料，將資料進行交叉檢驗和比較，以確立研究的客觀性。

參、「Balancing Act」教學活動實踐歷程一、

教學活動概述

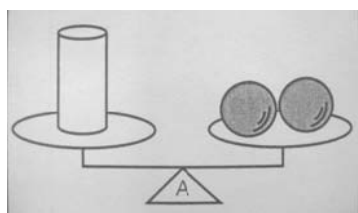
研究者採用美國Navigating through Algebra in Prekindergarten-Grade2 (NCTM, 2001) 這套教材，在未引入抽象符號表徵之方程式的情形下，利用天平兩邊達平衡狀態時的特性，引導低年級學童來學習等量加減法公理之相關基礎代數概念。以研究者所任教的國小二年級共17位學童為研究對象，進行「Balancing Act」單元教學活動，分成兩個階段實施，共四節課。第一階段輔以半具體物之操作（研究者利用自製教具進行教學，以方便讓學生透過視覺圖像，更易瞭解教學活動之內容），發展主要教學活動，培養學生理解等量加減法公理及遞移律概念。接著實施綜合評量活動，先讓學生自由上台發表各種可能組成平衡的狀態，同時指導學童練習利用口語的方式，解釋他們的理由，以幫助學生更流暢地表達心中想法。同時再進一步指導學生把自己的想法採用文字敘述方式表達出來，以完成學習單上較開放性的問題。在教學後一個月，進行第二階段的延伸活動，主要目標是引導學生使用數學表徵來闡述、表達想法，同時研究者再以相同的學習單進行後測，試圖藉由學生解題表現之改變，來了解學生是否能使用類似代數式的抽象符號來表達天平中的等量關係。茲將各項教學活動之實踐歷程與分析詳述如下：

二、教學活動進行之過程

（一）主要教學活動：

Engage 教學目標：利用天平的平衡狀態，找出積木間的等重關係當做前置經驗，引導學生了解等量加減法公理概念。

首先複習舊經驗，作為暖身活動，以確定大部分學生皆具備「若天平呈現平衡狀態，是表示天平的左右兩邊一樣重」的先備知識後，研究者開始佈題（如圖1），以檢視學生是否真的能將平衡的意義應用於各種情境之下。以下呈現原案與分析：



原案(1-1)

T：當天平呈現平衡狀態，是代表什麼意義？

S：天平的左右兩邊一樣重

T：那如果天平一邊高高的、一邊低低的是什麼意思呢？（老師在黑板上操作天平呈傾斜狀態）

S：升上去的那一邊表示比較輕，另一邊掉下去的就表示那邊比較重。

T：現在請小朋友觀察一下現在天平的狀況，這是代表什麼意思呢？（老師在黑板上操作天平呈平衡狀態）

S：兩邊都平平的，沒有翹起來，所以兩邊一樣重。

從上述原案可以發現，當教師佈題詢問「天平呈現平衡狀態，是代表什麼意義？」小朋友們都知道「兩邊都平平的，沒有翹起來，所以兩邊一樣重。」顯示孩子們能瞭解當天平的兩邊已經達到平衡狀態時，兩邊的重量會相同。

原案(1-2)

T：小朋友，如果老師在左邊和右邊同時都再放上一顆球，那天平會有什麼改變呢？

S：天平還是會平平的

T：你們是怎麼知道的？有沒有人可以再說清楚一點呀？

S：我知道，因為兩邊都加一顆球，是一樣的重量。

T：嗯...兩邊都是加上一樣的重量，很公平，所以天平繼續保持平平的。

T：那如果現在兩邊又都拿一顆球下來呢？天平會怎樣？

S：還是平平的呀，因為都一起減掉一顆球。

教師接著追問：「如果老師在左邊和右邊同時都再放上一顆球，那天平會有什麼改變呢？」以確認孩子們是否具備基礎之等量加法公理概念。學生們回答：「我知道，因為兩邊都加一顆球，還是一樣的重量」；經過層層的佈題，企圖引導學生理解等量加減法公理的概念，結果顯示學生能輕易地瞭解當天平呈平衡狀態時，如果同時在兩邊再各加上或減去相同的重量，將不會改變其原來的輕重關係，天平仍然會持續維持原來的平衡狀態。教師為了進一步引導孩子們探討天平平衡時，左右兩邊物體之關係，乃進一步追問：

原案(1-3)

T：說得很棒！剛才小朋友說天平保持平平的是代表兩邊一樣重，那到底是什麼東西和什麼東西一樣重呀？

S：圓柱和球一樣重

T：幾個圓柱和幾顆球一樣重？

S：1 個圓柱和2 顆球一樣重

在教師的引導下，孩子們很快便發現兩邊離散物體之關係「1 個圓柱和2 顆球一樣重」。教師接著追問：

T：很好！（老師在旁邊擺了另外一個和A 天平一樣的天平，左邊放1 個圓柱，右邊先放2 顆球）那我們現在來想想如果拿走右邊的一顆球呢？天平會再保持平衡嗎？還是會有什麼改變呢？（老師拿走右邊的1 顆球）

S：右邊會翹起來，因為右邊變輕了。

T：那左邊呢？（提醒學生注意另一邊的情況）

S：左邊當然就沈下去啦！因為它比較重。

T：哪邊比哪邊重呀？

S：左邊比右邊重。

T：誰會擺給大家看呢？（請學生上台示範操作天平兩邊的高低關係）

S：（移動天平，使天平呈現左低右高的狀態）

T：現在左邊放什麼東西？右邊放什麼東西呢？

S：左邊有1 個圓柱，右邊有1 顆球。

T：嗯...從這裡可以看出1 個圓柱和1 顆球誰比較重嗎？

S：我...我...我...1 個圓柱

T：可不可以再說清楚一點，1 個圓柱和1 顆球，誰比誰重？

S：1 個圓柱比1 顆球重

此時老師試圖引導學生利用等量減法公理找出積木間的重量關係。學生可以理解當拿走右邊一顆球時，因為左邊變得比右邊重，所以天平會呈現左邊往下沈，右邊往上升的傾斜現象。再回到圖1 重新佈題問學生是否可以直接看出圓柱或球體何者比較重？學生這時能比較出：「因為1 個圓柱和2 顆球一樣重，所以一個圓柱會比一顆球重。」顯示學生能運用已知條件來進行推理，以

解決未知的情况。教師接著佈另一個相似問題，以確認孩子們的概念是否正確，問題如圖2：

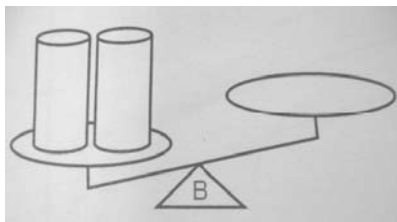


圖2 老師佈題（二）

原案(1-4)

T：剛才我們知道左邊放1 個圓柱的時候，右邊要放2 顆球，天平就會平衡。如果現在左邊變成擺2 個圓柱，那右邊應該要放什麼天平才會平衡？

S：4 顆球

T：還有別的答案嗎？誰可以說說看為什麼？

S：應該是4 顆球沒錯（其他學生紛紛附和），本來右邊放2 顆球，因為多1 個圓柱就是要多放2 顆球。

T：是不是一定只能放球呢？

S：老師！我還知道別的答案。

S：我也知道（兩生上台操作，皆在天平的右邊放了2 顆球和1 個圓柱）

T：大家同意這個答案嗎？

S：沒錯，第一個圓柱等於2 顆球，後來左邊多1 個圓柱，右邊就要多1 個圓柱，這樣才會平衡。

一看到圖2，班上許多同學第一個直覺臆測到的答案就是在右邊的秤盤上放4 顆球，且能提出合理的解釋「多1 個圓柱就是要多放2 顆球」。其解題歷程為一圓柱=二顆球 \Rightarrow 一圓柱+一圓柱=二顆球+二顆球 \Rightarrow 一圓柱+一圓柱=四顆球。研究者繼續追問是否還有其他答案？剛開始學生顯露出遲疑的態度，再進一步提醒不一定只可以放球體時，有2 個學生想到「也可以放2 顆球和1 個圓柱」，其原因為「左邊多1 個圓柱，右邊就要多1 個圓柱」，其解題歷程為一圓柱=二顆球 \Rightarrow 一圓柱+一圓柱=二顆球+一圓柱。顯示這兩個學生能利用等量加法公理之概念，以兩種不同的離散量物體（圓柱加球）來組成答案，進行解題。本來以為右邊再多放1 個圓柱會是學生最直接的反應，但也許受到圖1 的影響，受限於只能放球體的想法，所以才最先想出右邊要放4 顆球，兩邊重量才會相等的答案。另外從上述的對話中，研究者發現當學生皆認為標準答案只有一種時，藉由適時的提問來引導學生，更容易幫助他們發展較多元的解題策略。

Explore1 教學目標：利用平衡關係，從已知的物體重量，進一步求出另一未知物體的重量（用實際數值取代變異量）。

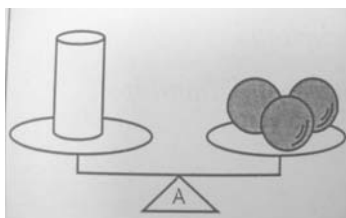


圖3 老師佈題（三）

接下來進行的是較具挑戰性的探索活動，研究者佈了一個與圖1 類似的題目（如圖3），不同的是引入數值取代變異量，給定天平其中一邊的重量數值，更進一步求出另一邊物體有多重。原案分析如下：

原案(1-5)

- T：如果一個圓柱重6 公斤，那麼一顆球體重多少？
S：（學生紛紛露出遲疑的眼神）
T：意思是如果左邊重6 公斤，那右邊呢？
S：也是6 公斤
T：那這樣能知道右邊的每一顆球有多重嗎？
S：我知道...是2 公斤
T：可以告訴大家你怎麼知道的嗎？
S：因為三顆球有6 公斤，所以一顆球是2 公斤， $2+2+2=6$

剛開始引入數值要求學生解題時，學生紛紛露出遲疑的眼神，苦思了好一陣子，還是沒人回答。研究者推測也許因為學生尚未學過「公斤」的重量單位，才不懂題目的意思，所以進一步向學童解釋「公斤」是一種用來測量重量的單位。「當我們想知道一個人有多高時，我們會說他有幾公分？所以當我們想量看一種東西有多重時，我們會說它有幾公斤。譬如我們利用體重計來量一個人有多重時，上面就是用公斤來表示重量的。」聽完老師的解釋，小朋友恍然大悟。研究者繼續重新提問：「如果我們知道左邊這一個圓柱有6 公斤那麼重，那右邊這裡一共重幾公斤呢？」提醒小朋友注意天平的平衡關係是解題的關鍵。之後小朋友終於順利運用三顆球總重6 公斤的線索，解出「一顆球重2 公斤，因為 $2+2+2=6$ 」的答案。教師接著追問圖4 之問題，原案分析如下：

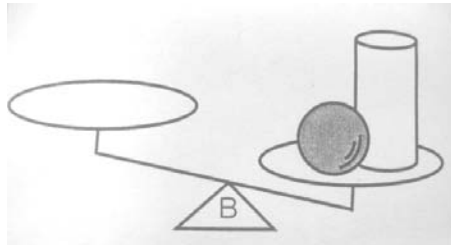


圖4 老師佈題（四）

原案(1-6)

- T：剛才我們從這裡（老師指著圖3）可以知道什麼和什麼一樣重？
S：1 個圓柱和3 顆球一樣重
T：好...我們在右邊擺上1 個圓柱，左邊放3 顆球，這樣會不會平衡？
S：會
T：如果現在右邊再加1 顆球，那右邊可以放什麼東西，天平就會平衡？
S：4 顆球
T：說說看為什麼呢？
S：本來左邊有3 顆球，因為右邊多加1 顆球，左邊也要多加1 顆球，總共就有4 顆球。

圖4 則是延續圖3 繼續佈稍有變化的挑戰題，當右邊再加1 顆球時，變成兩種不同的離散量時，欲使B 天平達到平衡，左邊的秤盤需放幾顆球才能繼續保持平衡。從學生的解釋「本來左邊有3 顆球，因為右邊多加1 顆球，左邊也要多加1 顆球，總共就有4 顆球」，分析其解題歷程為一圓柱 = 三顆球 \Rightarrow 一圓柱 + 一顆球 = 三顆球 + 一顆球。意即學生已能把1 個圓柱視為3 顆球來看，3 顆球加上原本的1 顆球，所以左邊總共要放4 顆球。由此可見，即使天平的一端是由兩種不同的離散量所組成之較複雜問題，學生亦能靈活運用等量加法公理來解題。

Explore2 教學目標：利用天平的平衡狀態，找出積木間的重量大小關係當做前置經驗，引導學生了解遞移律概念。

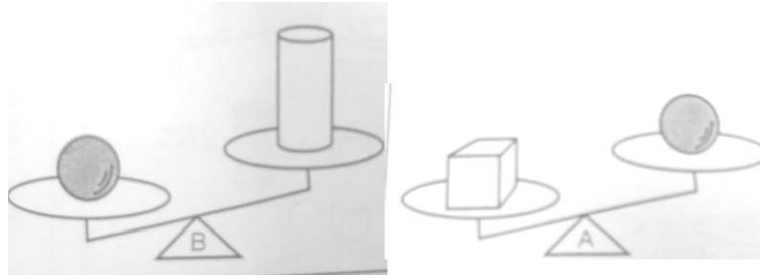


圖5 老師佈題（五）

最後研究者利用圖5 發展遞移律概念。剛開始利用A、B 兩個天平先分別比較兩

個量，找出兩個物體之間的重量大小關係，得知○比◡重，◡比◻重，但是卻無法直接比較圓柱及正方體的重量大小。接著希望學生能透過尋找適當的媒介量，來作間接比較，以找出三個物體之間的重量大小順序。原案分析如下：

原案(1-7)



T：我們已經找出

○比重，◡比○重，那到底哪個積木最重呢？（學生在

底下竊竊私語地討論）

S：我覺得是球

S：應該是正方體啦...你看這邊正方體比球還重耶（指著B 天平）

T：那圓柱和正方體該怎麼比呢？誰比較重？

S：兩個一起量量看

T：嗯...可是這裡沒有告訴你兩個一起量的結果耶，還有別的方法嗎？（學生開始皺眉頭...好一會兒都沒人發言）（老師試圖問問幾個平常較會發言的學生，他們還是搖搖頭，想不出來。）

學生剛開始採用直覺判斷，分別認為兩個天平中較重的積木就是三個裡面最重的。也許是用來作為比較媒介的球體相距太遠了，不易於學生利用量的保留概念來察覺三者之間有何相關。於是研究者試著把A、B 兩個天平的順序相互對調（如圖6），並利用生活中學生所熟悉的真實情境作為比喻，請學生把正方體當作是小瑾，球體是小皓，圓柱則是小仁（小瑾、小皓和小仁是班上的小朋友，他們的體重大小依序是小瑾最重、小皓次之、小仁最輕），幫助學生將較不熟悉的虛擬情境問題轉換成更具像化的表徵。

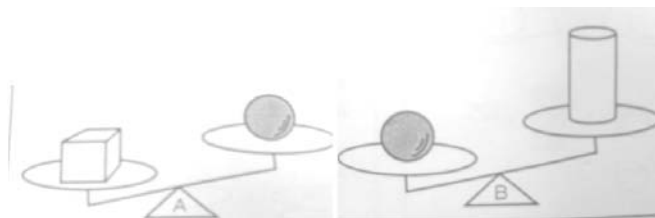






圖6 老師佈題（六）

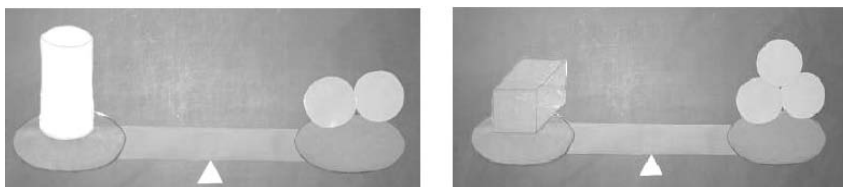
原案(1-8)

T：現在老師把這兩個天平的位置換一下（如圖6），你看到什麼？
 S：咦？兩個都有球耶...（但還是沒人想到可以用球來當媒介量）
 T：這樣好了，我們先把正方體當作是小瑾，球是小皓，圓柱則是小仁。小瑾和小皓誰重？
 S：小瑾
 T：當他們兩個去做翹翹板時，是不是會像這裡一樣？（指著圖6 的A 天平）
 S：對！小瑾比較重所以他會沉下去。
 T：那小瑾和小皓玩完翹翹板後，又跑來和小仁玩。小皓坐這裡（指著B 天平的左秤），小仁坐這裡（指著B 天平的右秤）誰比較重？
 S：小皓
 T：所以你可以猜猜看如果小瑾和小仁玩翹翹板會怎樣？
 S：小瑾會沉下去，因為他比小仁重。
 T：從剛才這兩個翹翹板，你們可以知道他們三個人之中，誰最重？誰最輕？
 S：小瑾最重、小皓第二重、小仁最輕。
 T：所以你們可以說出這三種積木哪一個最重嗎？
 S：正方體最重
 T：從最重的開始排排看這三個積木的順序
 S：正方體最重，球第二重，圓柱是最輕的。

在教師追問下：「請問他們三個人之中，誰是最重的？誰又是最輕的？」學生馬上說出小瑾最重、小皓是第二重的、小仁是最輕的，「所以你們可以說出圓柱、球體、正方體這三種積木哪一個最重嗎？」藉由生活真實情境中的輕重關係，幫助學生了解  比  重， 比  重，學生終於能夠推出正方體是最重的，圓柱是最輕的，順利發展出遞移律概念。

（二）綜合評量活動一：從學生的口語發表分析學生學到的代數觀念

由於國內教材通常只要求學生「說說看」自己的想法，並不像本活動學習單不僅要寫出答案，還要求學生回答「你怎麼知道的？」這種較開放的問題類型，所以研究者先讓學生自由上台發表各種可能組成平衡的狀態，指導學童練習利用口語的方式，解釋他們是怎麼知道答案的理由，以幫助學生更流暢地表達心中的想法，接下來才讓學生進一步把自己的想法採用文字敘述方式表達出來，以完成「Balancing Act」單元之學習單。老師先假定「一個圓柱和二顆球一樣重，一個正方體和三顆球一樣重」（如圖7），請小朋友上台排出各種可能平衡的狀況，並說出他們為什麼要這樣放的理由。研究者藉此檢驗學生是否能運用所學代數觀念進行解題，也希望幫助學生練習利用口語的方式，對他們的答案提出說明與解釋，一方面更流暢地表達自己的想法，另一方面同儕之間也可以互相分享與共同評量。



小朋友反應相當踴躍，紛紛舉手想上台來發表。以下是學生排出的各種平衡狀態：

1.天平的左右兩邊皆放上相同的離散量物體，是學生最直觀的反應。

(1) (2) (3)

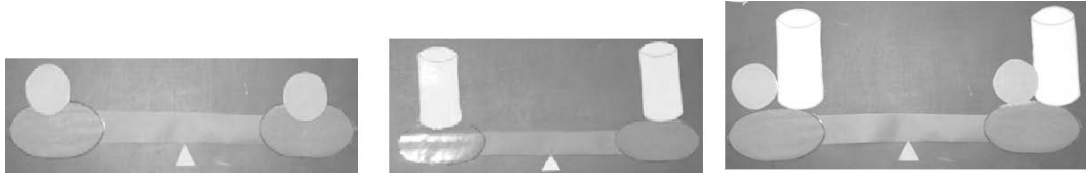


圖8 學生上台發表（一）、（二）、（三）

2.學童運用「1 個圓柱和2 顆球一樣重」的概念，推出「2 個圓柱會等於4 顆球的重量」（等量加法公理之應用）

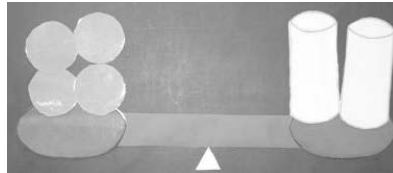


圖9 學生上台發表（四）

3.學童能從兩個比較關係中找出共同有的球體當作解題媒介，靈活運用「一個圓柱和二顆球一樣重，一個正方體和三顆球一樣重」的線索，推出天平平衡時，左右兩邊離散量物體之重量等價的各種情形

(1) 左=3 顆球

右=1 顆球+1 個圓柱=1 顆球+2 顆球=3 顆球

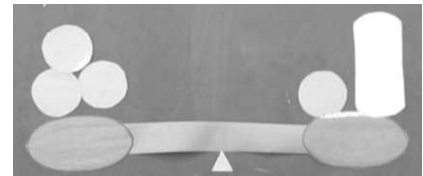
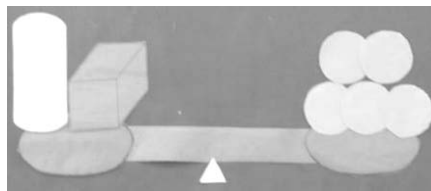


圖10 學生上台發表（五）

(2) 右=5 顆球左=1 個圓柱+1 個正方體=2 顆球+3 顆球=5 顆球



(3) 左=1 個圓柱+2 顆球=2 顆球+2 顆球=4 顆球右=1 個正方體+1 顆球=3 顆球+1 顆球=4 顆球



圖12 學生上台發表（七）

(4) 左=2 個圓柱+1 顆球=4 顆球+1 顆球=5 顆球
右=1 個正方體+2 顆球=3 顆球+2 顆球=5 顆球

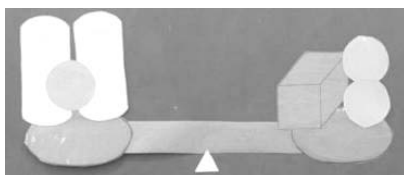


圖13 學生上台發表（八）

(5) 左=1 個正方體+3 顆球=3 顆球+3 顆球=6 顆球
右=2 個圓柱+2 顆球=4 顆球+2 顆球=6 顆球

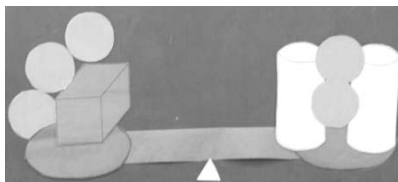


圖14 學生上台發表（九）

由上述的表現可見，藉由本綜合評量活動中的視覺圖像操作與口頭發表，小朋友已經能從天平的平衡關係中，發展出基本的代數概念。（三）綜合評量活動二：從解題策略分析學生具備的代數觀念

經過Engage 及Explore1、2 的教學活動及評量活動一後，學生已能用口語表達方式說明內心想法。而在接下來的綜合評量活動二中，主要是讓學生進一步把自己的想法採用文字敘述方式表達出來，以完成「Balancing Act」單元之學習單，共有三個題組，每一題組有2 小題。以下將學童習寫「Balancing Act」單元之學習單表現分析如下：

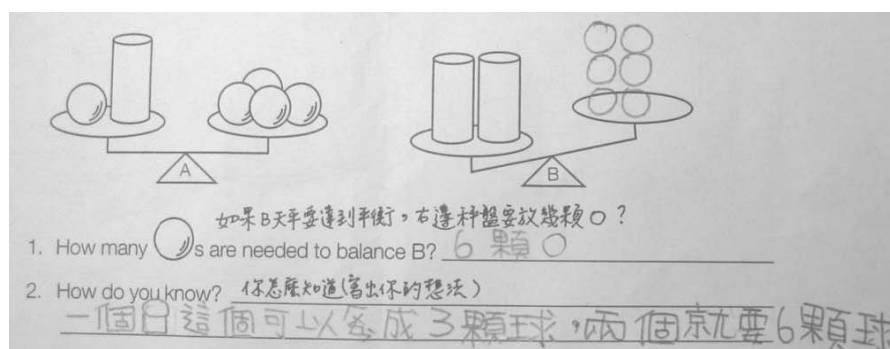


圖15 S1 在題1、2 之學習單表現

1.在第一組天平中（問題1、2），面對問題1「需多少圓球才能使 B 天平達到平衡」，剛開始做答時，學童多數不知如何解題，因受限於A 天平左秤放的是的兩個不同物體所組成的離散量而影響解題，學童無法一下子就從A 天平中察覺「1 個圓柱和幾個球一樣重」，所以在解B 天平中「若想平衡2 個圓柱需要幾個球？」時遭遇到困難。經過教師加以提醒「先找出1 個圓柱和幾個球一樣重」後，學童才將焦點放在圓柱上，利用等量減法公理找出「1 個圓柱和3 個球一樣重」的解題關鍵。從問題2 學生的想法中，可得知17 位學童中，有16 位學童大多如圖15 中的S1

直接寫出「因為1個圓柱可以換成3個球，所以2個圓柱就要6個球」。



從S2這位學童的解釋（圖16），我們可以較清楚瞭解他試圖利用「等量減法公理」將A天平兩邊各減去一顆球，所以找出1個圓柱和3個球一樣重的線索來解題。

2. 第二組天平（問題3、4），在解問題3「需要多少個圓柱才能使D天平達到平衡」時，17位學童中有15位都寫出「3個圓柱」，只有2位學童未作答。問題4請學生根據題3提出解釋「你如何知道的？」，回答正確的學童皆能寫出「因為3顆球可以換成1個圓柱，所以9顆球可以換3個圓柱」（圖17）。由此可發現學童大多能應用問題2中學得的解題關鍵來解題。



圖17 學童題3、4 學習單表現

3. 第三組天平（問題5、6），在問題5「請學生觀察天平 E 和 F 後，找出哪一個積木是最重的」，17位學童中仍然有二位學童未作答，其餘15位學童均正確圈出正確答案是圓柱。在問題6請學生根據題五提出解釋「你如何知道的？」題五回答正確的學童

能寫出「因為圓柱是3顆球，正方體是2顆球，圓柱比正方體多1顆球」，所以  比  重，如圖18所示。

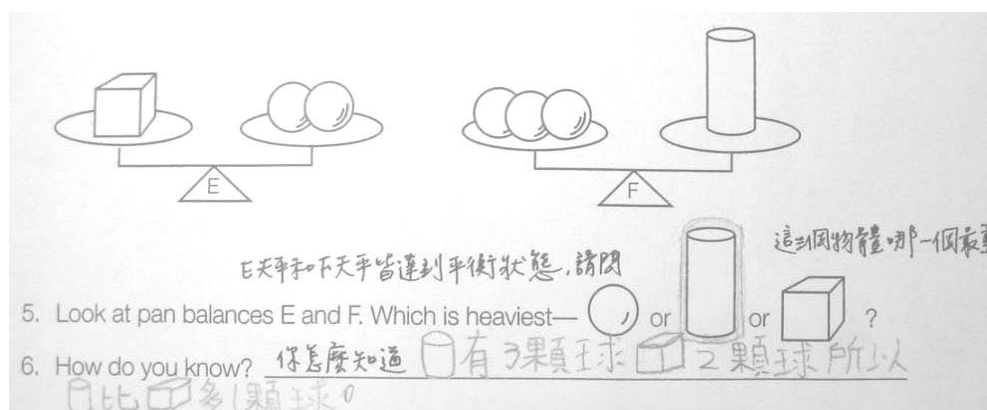


圖18 學童題5、6 學習單表現

從上述學童填寫學習單的表現知道他們能輕易地回答出問題1、3、5 這種有標準答案的問題類型，但在回答問題2、4、6 時，卻遭遇到極大的困難，許多人不知該如何利用文字敘述闡釋自己的想法，這也許是因為他們較少接觸這類開放式問題的緣故。但是藉由綜合評量活動一中的視覺圖像操作與口頭發表，有些人已能試著用圖形或文字表徵來說明自己的想法。綜觀這三個題組，大部分答對問題1、2 的人都能答對問題3、4，因為他們都是運用「1個圓柱和3顆球一樣重」的線索來解題。然而針對問題6 而言，只有三分之二的同學能寫出理由來解釋自己的答案，但都只做出兩者之間的比較「圓柱比正方體還重」，似乎還無法看出學生是否真正使用遞移律來解決三

個物體之間比較。

(四) Extend 延伸活動：教學活動後一個月，進行第二階段延伸活動。本節課的主要目標是引導學生使用數學式的語言（類似代數式的抽象符號）來闡述、表達想法，以刺激其較抽象層次的思考。同時研究者再發予學生相同的學習單進行後測，試圖藉由學生解題表現之分析來了解學生如何連結相關概念，及如何運用相關概念進行推理與溝通；並探討經過上述教學活動後，學生是否能真正發展出相關之代數概念。

老師先在黑板上呈現A、B 兩個天平，A 天平的左邊擺1 個圓柱，右邊擺3 顆球；B 天平的左邊擺1 個正方體，右邊擺2 顆球，使兩個天平均保持平衡狀態。原案（1-9）

T：如果這兩個天平現在是呈現平衡狀態的，那是表示什麼意思呢？



S：兩邊一樣重



S：1 個圓柱和3 顆球一樣重，1 個正方體和2 顆球一樣重。

T：很好！還有其他的說法嗎？



S：他們都相等



1),

T：沒錯...我們先看A 天平，左邊擺1 個圓柱（老師在左秤盤下面寫下1 個  右邊擺3 顆球（老師在右秤盤下面寫下3 個 ）。如果我們想把「1 個圓柱和3 顆球一樣重」這句話寫得短一點，可以在

這中間寫什麼（1 個  ? 3 個 ）

S：=（等於）

T：好，你的意思是這樣嗎？（老師寫下1 個  =3 個 ）
老師利用提問的方式，引導學生說出可以用「等於」來表示「兩邊一樣重」的情

況，接著在黑板上寫上「1 個  =3 顆球，1 個  =2 顆球」，等到此表徵達成大家的共識之後，請小朋友根據此假設自由組合，畫或寫出各種可以平衡的狀態。雖然他們並不能用十分精鍊正確的數學式語言表達，但輔以文字敘述，也能使我們從中窺知其所具備的數學概念。學生的表現如下：

1.圖19 顯示這位學生能用相當流暢的文字敘述，解釋自己所寫出的算式。（1）將圓柱、正方體分別轉換成相當於幾顆球，最後用球表示左邊的算式所得的結果。（2）同時利用2 個球=1 正方體及1 圓柱=3 個球兩個已知條件進行轉換，而得到右邊等式。其中他將已知條件1 正方體=2 個球轉換成2 個球=1 正方體，顯示他確實瞭解等式兩邊表示的意義，左右交換等式還是成立。同時從右邊的等式發現他也能用兩種不同物體表示最後所得的結果，似乎顯示出比第（1）種更靈活的思考模式。（3）用2 個球=1 正方體的已知條件，求出所得的結果。

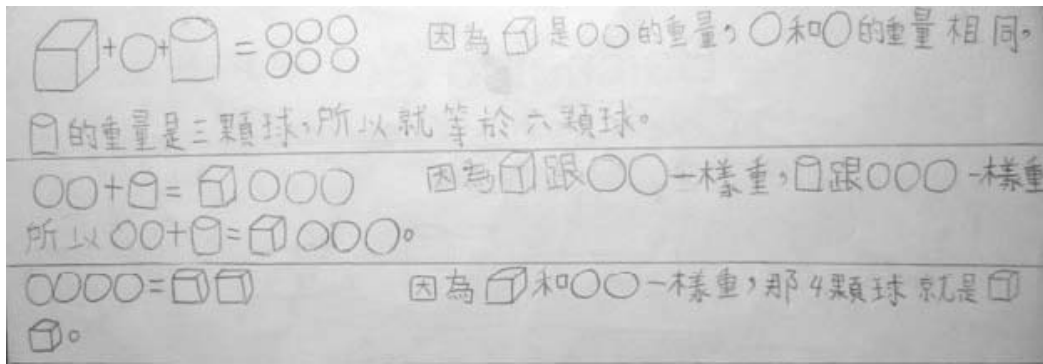


圖19 S3 延伸活動表現—運用符號表徵各種平衡狀態

2.由圖20 可知，這幾位學生分別使用「1 正方體=2 個球」或「1 圓柱=3 個球」一個已知條件寫出各種等式，有的也用畫圖表徵等式的意義，而且在等式的右邊最後皆用總共等於幾顆球來表示所得結果。

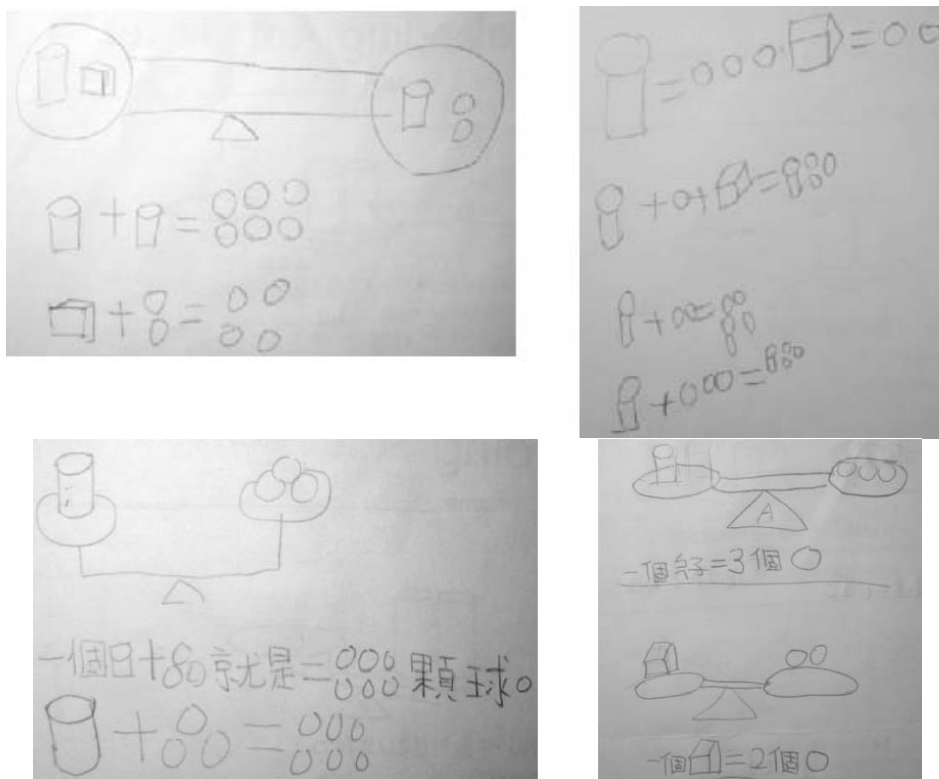


圖20 學生延伸活動表現-運用符號表徵各種平衡狀態（五）學習單後測表現分析

1.進行學習單後測分析後得知，在問題1 和問題2 中部分學生寫出

「因為 [cylinder] + [cube] = [six spheres]，那 [cylinder] - [sphere] 還有一個 [cylinder] 和 [three spheres]，那就表示一個 [cylinder] 和 [three spheres] 的體重一樣了」或「把A 天平兩邊各拿走一顆球就可以知道，一個圓柱體有3 顆球；B 天平二個圓柱體，共有六顆球」，如圖21 所示，清楚說明他們是利用等量減法公理從A 天平找出線索，例如：「1 個杯子=3 顆球」、「2 個杯子=6 顆球」，如圖22 所示，來解B 天平中「2 個圓柱的重量=6 個球的重量」這樣的問題。此時可以看出學生除了文字敘述之外，已能運用加減運算符號寫出等式，來呈現他們的解題歷程。比較他們第一次撰寫學習單時的解題表現，顯示他們能夠以抽象的思維來思考問題，表達想法。

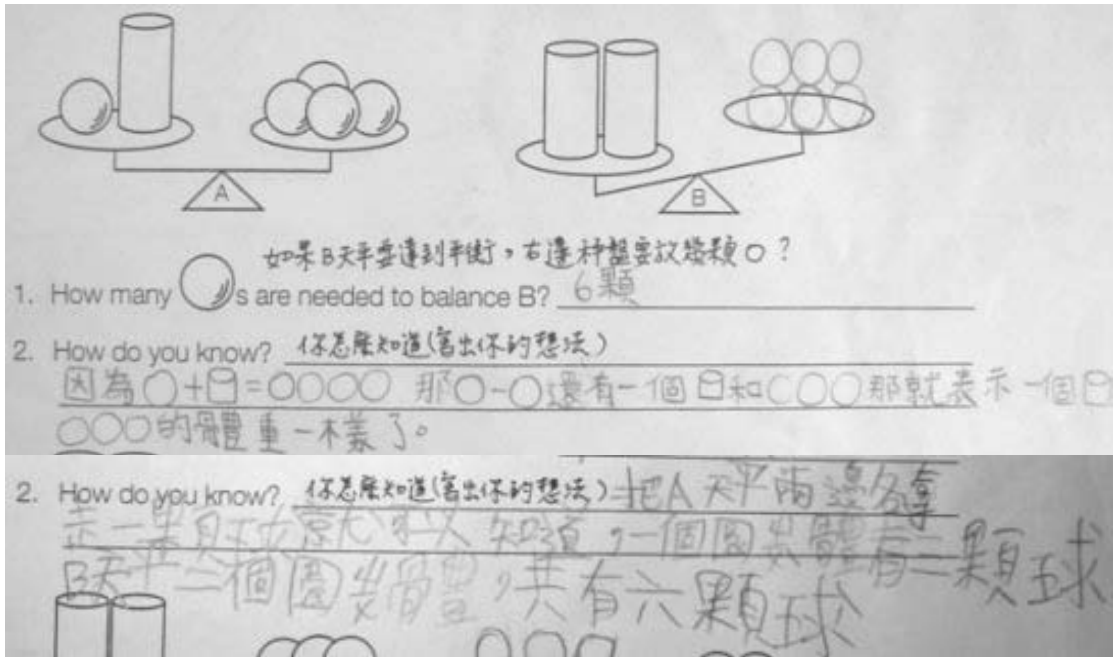


圖21 學生題1、2 學習單後測表現

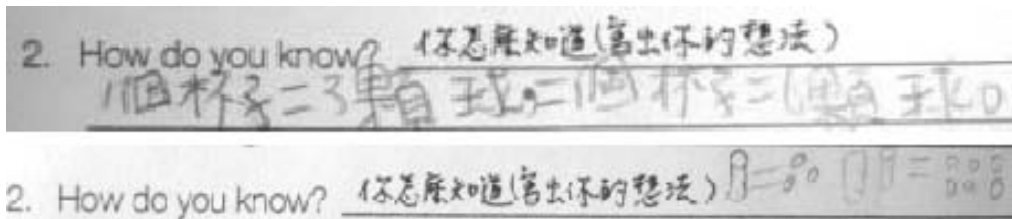
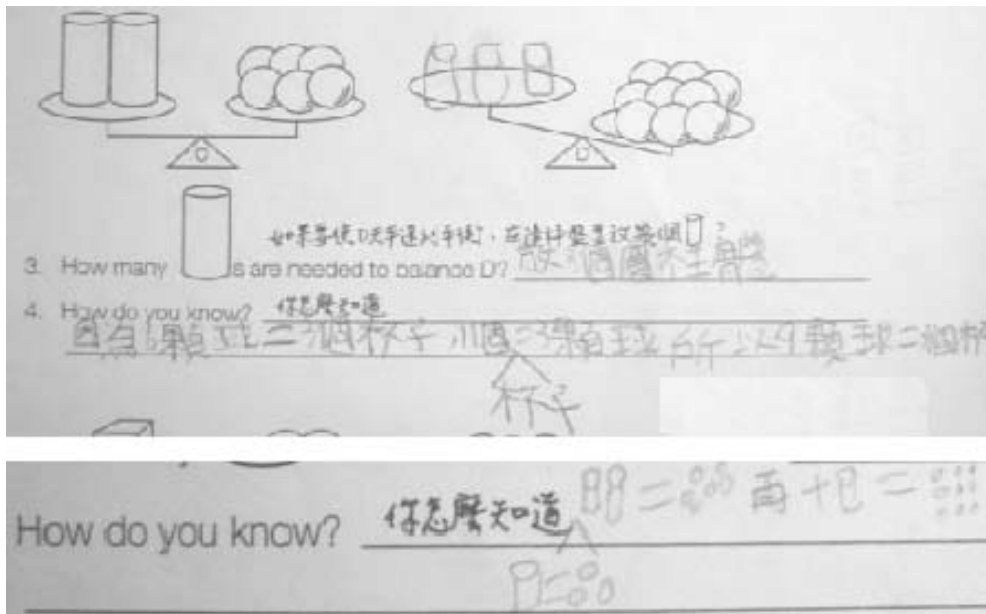


圖22 學生題2 學習單後測表現


2.在問題4 中，也有學童能說明他們先從C 天平找出線索，例如：「1 個杯子=3 顆球」、
 「 $1\text{個圓柱} = 3\text{顆球}$ 」、「三個 球 代表 1個圓柱 」、「3 顆球就是一個 圓柱 」所以「3 個圓柱
 的重量=9 個球的重量」，如圖23 所示，來使D 天平達平衡。













4. How do you know? 你怎麼知道
 三個○代表A, 九個代表AAA

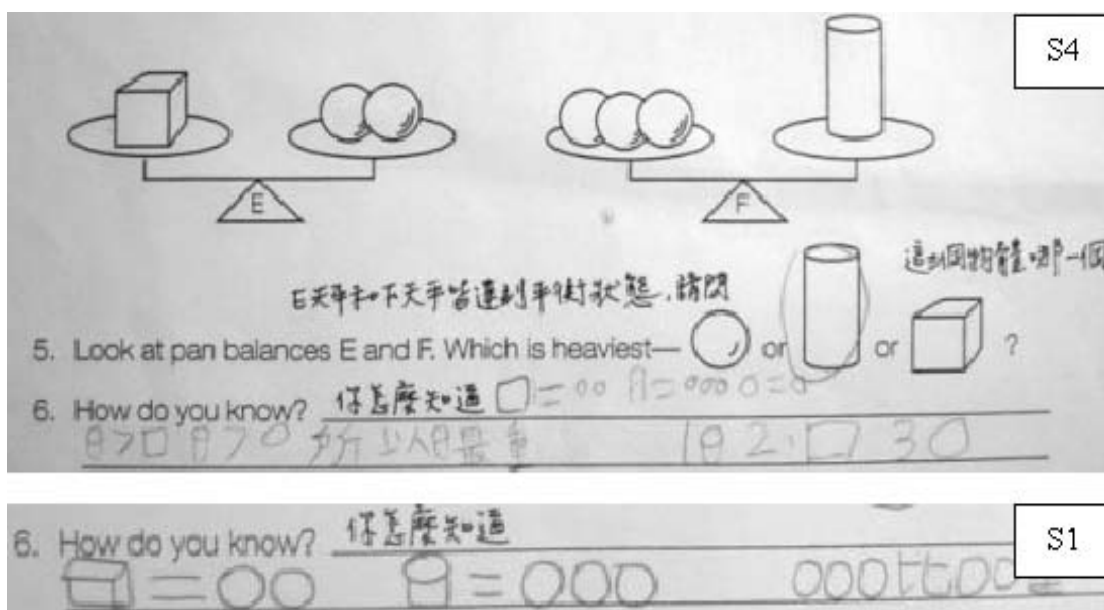
4. How do you know? 你怎麼知道
 3顆球就是一個A, 那9顆球就是3個A了

圖23 學生題3、4 學習單後測表現

3.在問題5 中，17 位學童均圈出正確答案， 的重量最重。再針對問題6 的表現進行分析，發現許多學生皆可以找出以球體當作媒介量，對圓柱及正方體進行間接比較。

S4 從E 天平及F 天平找出「 = ○○,  = ○○○」的線索，同時和已知事實「○ = ○」進行比較，利用每個積木相對應之球的數量來得知三個物體間的重量大小關係是 >  ,  > ○, 所以 最重，並詳細寫出三者由重到輕的排序結果是圓柱、正方體、球。而S1、S5 及S6 皆利用「3 顆球比2 顆球還要重」，意即圓

柱比正方體多1 顆球，來推出「 比 重」，而S6 又從E 天平得知 比○ 重，所以 是三個積木中最重的。由此發現，S6 已能使用良好遞移律來解題，如圖24 所示。



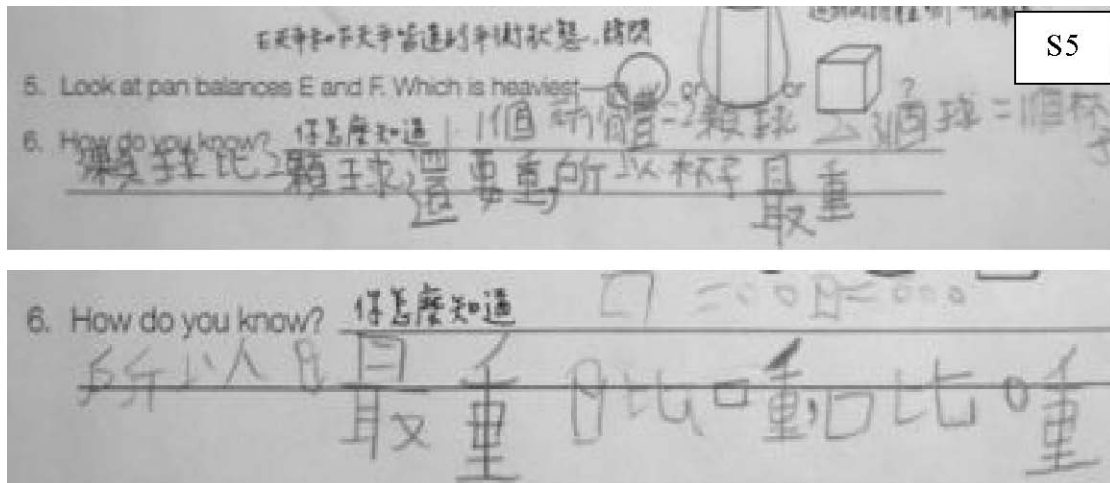


圖24 S1、S4、S5、S6 題5、6 學習單後測表現

這是教學活動經過一個月後，再讓學生習寫同一份學習單的後測表現。所有學生均輕鬆答對問題1、3、5，至於問題2、4、6 回答，明顯地可看出學生更成熟的解題表現。現在他們已能使用類似代數式的抽象數學式語言來表徵自己的想法，例如： $+$ 、 $-$ 、 $=$...符號之運用。此外，大多數的學生不再一看到「你是怎麼知道的？」這種開放性的問題就退避三舍，反而認為自己可以試著寫寫看自己的想法，而且由他們解題的表現，我們可以發現學生能更清楚地解釋自己解題歷程之來龍去脈。面對在第一次習寫學習單中最棘手的問題6，從幾位學生所陳述的解題過程，如圖24 所示，我們清楚發現他們已能正確使用遞移律之意涵，來解決三個不同物體之間的比較。

伍、發現與建議

本研究利用「Balancing Act」教學活動幫助學生了解如何連結既有概念，來進行新概念的學習，進而幫助其發展推理與溝通的能力，以當作未來學習代數的基礎。

一、教學歷程中的發現：

1. 天平可作為學習等量加減法公理、遞移律等代數概念之入門橋樑

代數的範疇相當廣泛，包含了許多抽象的數學概念，所以通常安排於較高年級的課程之中。但本研究在不引入抽象符號表徵方程式之前提下，利用已學習過的天平，教導國小二年級學童學習相關之基礎代數先備概念，如：等量加減法公理、遞移律，發現很多不同程度的學童皆容易接受此概念的學習，此結果正呼應了相關的研究(Cortes, Kavafian, & Vergnaud, 1990; Filloy & Rojano, 1989; Schlimann, Lessa, Lima, & Siqueira, 2007)。由此可見天平應可作為低年級學童學習等量加減法公理、遞移律等概念之入門橋樑，以連結未來較複雜抽象之代數概念學習。

2. 低年級學童解開放式問題容易遭遇困難

本活動學習單不僅要求學生寫答案，還必須寫出自己的想法，說明他們是怎麼知道的。由於平常台灣的教科書中較少出現這種開放式問題，大部分只是「想想看、說說看你是怎麼知道的？」但並不需要真的用書寫方式表達想法，所以在下筆的過程當中，只見學生一個一個皺起眉頭來，紛紛反應不知如何回答這類型的問題。雖然學童利用圖形或文字描述其對數學概念的理解，比較困難且耗時，但研究上已有許多證據支持學童應利用圖形表徵來溝通其對數學概念的理解(李源順與孫德蘭, 2005)。所以在給予學生充分討論的時間及口頭發表的機會，並經由老師適時從旁引導、提問後，發現學生仍然可以試著寫出他們的想法。

3. 利用生活上的真實情境作為比喻，可幫助學生體會抽象的代數意義，成功發展遞移律的概念。

美國NCTM 主張對認知發展階段處於具體運思期的兒童而言，提供真實情境是學習與數學抽象符號、表徵所不可或缺的活動(劉秋木, 1996; NCTM, 2000)。荷蘭的真實數學教育(RME)

則認為基於兒童的認知發展，應以生活的真實情境為核心(黃幸美，2001)，藉由使用脈絡(context)及模式(model)使兒童經由不同層次的數學化過程，發展自己的數學。Choi 與Hannafin (1995)亦指出，當學習發生於有意義的情境時，便會產生有效的學習。所以可以利用生活中學生所熟悉的真實情境作為比喻，幫助學生將較不熟悉的虛擬情境問題轉換成更具像化的表徵，成功發展遞移律的概念。例如：剛開始學生無法察覺正方體、圓柱及球體之間的到底誰最重？誰最輕？但研究者把這三種物體按照重量大小順序比喻成班上小朋友的體重大小關係，學童果然很快就經由間接比較，察覺出遞移律的意涵。

二、建議

美國數學教師學會(NCTM)所出版之「Navigating through Algebra in Prekindergarten -Grade2」這套教材「Balancing Act」的教學單元，能夠巧妙地運用天平的平衡關係以及層層問題的引導，幫助低年級學生發展基礎代數概念，同時也著重培養想法的表達。因此，當我們利用天平進行物體的重量大小關係之比較時，也可以再進一步發展代數前置概念的學習，且藉由更多「開放式問題」來培養學生靈活的思考能力。因此建議未來國內發展相關教學活動時可參考該教材所發展之活動，以增強國內相關教材之內容。

參考文獻

- 李源順與孫德蘭(2005)：同分母真分數加減運算的教學研究。論文發表於臺北市立教育大學理學院主辦之國際學術研討會--卓越教學理論與實務研討會，臺北。
- 教育部(2003)：國民中小學九年一貫課程正式綱要。教育部編印。
- 黃幸美(2001)：生活數學之教學理念與實務。教育研究雙月刊，**91**，63-73。
- 劉秋木(1996)：國小數學科教學研究。臺北：五南圖書出版公司。
- Ainely, J. (1999). *Doing algebra-type stuff: Emergent algebra in the primary school*. In O. Zaslavsky(Ed). *Proceedings of the Twenty Third Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp.9-16). Haifa, Israel.
- Brown, L & Coles, A. (2001). Natural Algebraic Activity. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra: Proceedings of the 12th ICMI Study Conference* (vol. 1, pp.120-127). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.
- Bellisio, C., & Maher, C. (1998). What kind of notation do children use to express algebraic thinking? In S. Berenson, K. Dawkins, M. Blanton, W. Coulombe, J. Kolb, K. Norwood, & L. Stiff (Eds.), *Proceedings of the XX Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.161-165). Raleigh, NC: North Carolina State University.
- Bodanskii, F. (1991). The formation of an algebraic method of problem solving in primary school children. In V. Davydov (Ed.), *Soviet studies in mathematics education. Psychological abilities of primary school children in learning mathematics* (Vol. 6, pp.275-338). Reston, VA: National Council of Teachers of mathematics.
- Choi, J.& Hannafin, M. (1995). Situated cognition and learning environments: Roles, structures, and implications for design. *ETR &D*, *43*(2), 53-69. Cortes, A., Kavafian, N., & Vergnaud, G. (1990). From arithmetic to algebra: Negotiating, a jump, in the learning progress. In G. Booker, P. Cobb, & T. De Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the XIT International Conference Psychology of Mathematics Education* (Vol. II, pp. 27-34). Oaxtepec, Mexico.

- Crawford, A. R. (2001). Developing algebraic thinking: Past, present, and future. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: Proceedings of the 12th ICMI study Conference* (Vol. 1, pp. 192-198). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.
- Davydov, V. (Ed.).(1991). Soviet studies in mathematics education, vol. 6: *Psychological abilities of primary school children in learning mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teacher of mathematics. (Original work published 1969)
- Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the learning of Mathematics*, 9(2), 19-25.
- Kaput, J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebra flying" the K-12 curriculum. In National Council of Teacher of mathematics(Eds.), *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum*, Washington, DC: National Academy Press.
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra* (pp.65-86). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *The Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM. National Council of Teachers of Mathematics. (2001). *Navigating through Algebra in Prekindergarten-Grade2*. Reston, VA: NCTM.
- Schlimann, A. D., Lessa, M. L., Lima, A. P., & Siqueira, A. (2007). Young children's understanding of equivalences. In A. D. Schlimann, D. W. Carraher, & B. M. Brizuela (Eds.), *Bringing Out the Algebraic Character of Arithmetic* (17-35). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Slavitt, D. (1999). The role of operation sense in transitions from arithmetic to algebraic thought. *Educational Studies in Mathematics*, 37, 251-274.
- Smith, S. (2000). Second graders discoveries of algebraic generalizations. In M. Fernandez(Ed.), *Proceedings of the XXII Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.133-139). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse.
- Warren, E. (2001). Algebraic understanding: The importance of learning in the early years. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent(Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: Proceedings of the 12th ICMI Study Conference* (Vol. 2, pp.633-640). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

The Study of the “Balancing Act” Integrating into the Second Grader’s Mathematics Teaching

Pei-Rong Li¹ Der-Ching Yang²

Graduate Institute of Mathematics Education, National Chiayi University

Abstract

In order to investigate the process and effects of balance activities integrated into the second grade math class, one class with 17 second graders participated into the study. The materials, *Balancing Act of Navigating through Algebra in Prekindergarten-Grade2* published by NCTM, were used.

The results indicated that balance activities not only can promote the second graders knowledge on comparing the weight on balance, but also foster their understanding related to the basic concept of equivalent axioms. At the same time, this research found that it is difficult for the second graders to solve open-ended questions, therefore, they need more supports during solving open-ended questions. Moreover, it is helpful for students to understand abstract concept of pre-algebra and develop the concept of transitive rule successfully when real-life situated problems were used in the teaching.

Key words: balance, algebra, equivalent axiom, grade two