國教新知

第 53 卷　第 1 期

馬可夫鏈模型(Markvo Chain Model)在地理學研究之運用

張政亮

（臺北市立教育大學 社會科教育學系副教授兼主任）

摘 要

馬可夫鏈模式是一種預測的方法，模式先假設某一事件各種狀態的轉變機率，是根基於此時狀態的改變而暫不考慮其他因素，然後利用此一轉換率來推測未來事物的分布狀態。馬可夫鏈模式近年來廣泛應用管理決策分析、醫療過程追蹤、環境監測評估等各項領域；近年來有學者將其引用至人口調查、水文氣候、土地利用變遷等地理學門的研究議題上，也累積可觀之成果。馬可夫鏈以其轉換矩陣概念來展示空間區位利用與數量的改變情況，故可作為比較一地不同時期地貌變遷、土地利用的變化情形，並能預測未來可能之發展，尤其近年來結合其他理論與衛星遙測、地理資訊系統等分析技術，使土地空間利用的規劃與管理更臻於便捷與完善。

關鍵字：馬可夫鏈模式，土地利用變遷

壹、引言

模型(model)一詞的定義雖頗為分歧與多元，但其核心含義都是一致的，所謂模型是對各種實體與現象的簡化或抽象化，並能用以表達這些各種實體與現象的重要構成與其相互關連性（書玉春、陳鎖忠等，2005），而一旦經檢驗有效的模型如果被廣泛接受，變成為某種事物的標準形式或使人可以照著做的標準樣式，則可以稱為是一種「模式」。

模型或模式的建立有助於對事項的解釋、分析、診斷及預測，也是建立完整系統科學體系的重要步驟；一般依模型的表示方法可將模型分為符號（圖表）模型、物理模型及數學模型等類別，其中數學模

型即是利用數學方程式來描述事項的結構與特性，又若這些事項的變數之間不僅具有函數關係，而且符合機率法則，那麼加入滿足變化關係的隨機變數後，即可稱為機率模型（趙大鵬，2004）。數學模型因有助於以模擬（simulation）的方法來對系統科學進行描述、分析和求解，所以在建置模型所使用的科學方法中，運用數學模型來抽象地闡述事項特徵和其變化規律，乃為當今應用最為廣泛的一種方式。

馬可夫鏈模型(Markov Chain Model)是一種常用的機率模型，又稱為馬可夫鏈分析(Markov Chain Analysis)，其原理為利用機率轉移矩陣所進行的模擬分析，此模型為一動態模式，參數可隨時間而變具有系統性，故可以用來預測未來事物變遷狀態或空間擴散趨勢（Bremaud，1998、廖怡雯，2003）。馬可夫鏈模型的應用領域非常廣泛，例如在數理模式發展、管理決策分析、疾病醫療追蹤、金融保險探討等，近年來許多學者也將其引用至地理相關議題的研究，如人口移動、城市發展、水文氣象、土地利用變遷等分析上；而隨著統計與資訊科技的進展，馬可夫鏈模型也漸結合其他的模型與系統而在地理空間分析的技術上有著顯著之發展，故因應此種趨勢，對馬可夫鏈模型的原理與運用方式進行瞭解，實有助於地理學科知識與研究方法之昇躍。

貳、馬可夫鏈模型的介紹

馬可夫鏈模型之基本概念是在 1907 年由俄國數學家 Markov A.A.從布朗寧運動(Brownian motion)的研究中所提出，隨後經由Wiener、Kolmogorov、Feller、Doeblin及Lery等人的研究整理而於1930到1940年代建立出此模型（楊超然，1977）。所謂馬可夫鏈(Markov Chain)的定義是指在隨機過程（stochastic processes）中，敘述任何要件(component）的機率分佈狀態，是僅賴由先前的要件（previous component）所掌控，則具此特性的推測過程稱之為馬可夫過程（Markov Process），又如果在馬可夫過程的分析上發現要件的狀態空間(state space) 是有限的（finite），那麼此馬可夫過程便稱為馬可夫鏈(Foley，2001）。

綜合相關的研究與探討可以得知，馬可夫鏈模型屬於預測(Forecasting)方法的一種[1]（Bourne，1976、姜祖恕，1985、梁蘄善，1985、高孔廉，1993、丁志堅，1997、Anderson，2000、洪彬皓，2002），然而預測的方法很多，常見的方法即是選取若干適當的解釋變數，建立迴歸分析(Regression Analysis)方程式，以作為預測之依據，但有時變量所受之影響因素繁多，或有些重要的獨立變數無法數量化時，預測的效果便不佳，而馬可夫鏈則是以現在所發生之事來推測未來，所憑藉的是前一時刻的狀態和轉換機率而與時間過程無關，亦即是由資料本身

[1] 本文有關馬可夫鏈的基本概念、數學公式與模式推導，主要是整理自管理數學、作業研究、計量地理與相關研究論文而歸結，相關註解亦見於參考文獻中，讀者若有需要可從這些文獻來延伸閱讀。

來決定自己變動的形態，而不使用其他獨立變數去作解釋，故能提供另一種預測的模式。馬可夫鏈的解釋如下：假設我們所觀察或實驗所發生的結果定為 $E_1, E_2, \cdots E_n, \cdots$，對於每一個結果 E_k，我們若能給定一個出現的可能性 p_k（即機率），則對某一特定樣本之序列 $E_{j1}\ E_{j2} \cdots E_{jn}$，我們可知它出現的機率是 $p\ (E_{j1}\ E_{j2} \cdots E_{jn}) = p_{j1} \cdots P_{jn}$，這是指觀察的各項結果之間，彼此是互相獨立的情形；但在馬可夫鏈的理論中，我們的目的就是要認定觀察的各項結果是非獨立而具「互相關聯的」，這樣才能以現在來推測未來，在這種情況下，我們不能給任一個事件 E_j 一個機率 p_j 但我們可以給一對事件 (E_j, E_k) 一個機率 p_{jk}，這個時候 p_{jk} 的解釋是一種條件機率，就是假設在某次試驗中 E_j 已經出現，而在下一次試驗中 E_k 出現的機率。除了 p_{jk} 之外，我們還須要知道第一次試驗中 E_j 出現的機率 a_j。有了這些資料後，一個樣本序列 $E_{j0}\ E_{j1} \cdots E_{jn}$（也就是說第零次試驗結果是 E_{j0}，第一次試驗是 E_{j1}……第 n 次試驗是 E_{jn}）的機率就很清楚的即是 $P(E_{j0}, E_{j1}, E_{jn}) = a_j\ p_{j0j1}\ p_{j1j2} \cdots p_{jn-1jn}$。

由上述之分析可知馬可夫鏈是一種特殊的隨機過程，以數學式來表示則所謂隨機過程乃是一個隨機變數之集合 $\{X_t\}$，其下標 t 為集合 T 之元素（T 通常是非負數的整數集合），而 X_t 則是在時間 t 的某一特徵。例如，隨機過程 X_1，X_2，$X_3 \cdots$ 可代表每一特定時間系統內的購物地區、顧客數目或是貨物需求量等…。若條件機率符合下述情況：對於任意 t = 0 ，1 ，2…，　，每一 $i, j, k_0, k_1, \cdots, k_{t-1}$ 都使得 $P\ \{x_{t+1} = j \mid X_0=k_0, X_1=k_1, \cdots, X_{t-1}=k_{t-1}, X_t= i\} = P\ \{X_{t+1}=j \mid X_t= i\}$，則稱隨機過程 $\{X_t\}$ 有馬可夫性質。此條件機率 $P\ \{x_{t+1} = j \mid X_t= i\}$ 乃是藉由事件狀態所有向度的演變機率（Transition Probability），來推測未來事件分布的狀態，這種機率的需滿足下列性質：

$$P_{ij} = n_{ij} / \sum_{j=1}^{m} n_{ij} \quad i=1,2,..m \text{ ………(式一)}$$

（m 為事件的狀態數，第 i 種狀態轉變為各種狀態的總和為 1）

$$P_{ij} = n_{ij} / \sum_{j=1}^{m} n_{ij} \text{ ……(式二)}$$

（其中 P_{ij} 演變機率，N_{ij} 為事件 i 轉變至 j 的能量）

歸納事件所有狀態的演變機率，以矩陣表示則可得「演變機率矩陣」（Transitional Probability Matrix），

$$A = \begin{bmatrix} P11 & P21 & \cdots & Pm1 \\ P12 & P22 & \cdots & Pm2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P1m & P2m & \cdots & Pmm \end{bmatrix}$$

為一 m x m 矩陣
每列的總合為1　……（式三）
矩陣內各數值≧0

假設Ａ為轉變機率矩陣，則：

依據馬可夫鏈的性質，假定存在一事物的初始分布狀態Ｐ及某一時期的轉變機率為Ａ，其中：

$P=[P_1P_2...P_m]$，$\sum p_i=1$，則：

$PA=P^1$ 表示經過一階段(stage)之後，事物的分佈狀況。

$PA^2=P^2$ 表示經過二階段之後，事物分佈狀況。

$PA^m=P^m$ 表示經過ｍ階段之後，事物分佈狀況。

此為以一時期內數量變化為依據(A)，以矩陣代數方推算以後個時期的變續變化(p^1、p^2、…、p^m)，如果作為根據的演變時期，觀察正確而以後又無新的變動因素加入，則利用馬可夫鏈演算下去，即當矩陣重複自乘至無限多次之後，矩陣內的各個數值將會達到所謂的穩定狀態機率(Steady State Probabilities)而不再變化，此情形稱為平衡矩陣或會合矩陣(Convergence Matrix)，其形態表示如式四所示，所以若設 $PL=Q$，由於Ｌ為平衡矩陣，則Ｑ便為此時期事件最終的分佈狀態，也為反應出此事件變化程度的理論趨勢值 此時不論P的分佈狀況為何，Ｑ皆為一定的分佈狀態，亦即不受初始狀態的影響也與時間無關，而此穩定狀態可由聯立方程式求得（參見圖三）。

$$L=\lim_{m\to\infty}A^m \quad \cdots\cdots（式四）$$

馬可夫鍊依其性質可區分為正規馬可夫鏈（Regular Markvo Chain）與吸收馬可夫鏈(Absorbing Markvo Chain)兩種。正規馬可夫鏈是指任何矩陣Ｐ是一個轉移矩陣，而且Ｐ連續的自乘積，在自乘到達ｍ次以後，使得其自乘ｍ次後所有的元素均大於０，滿足此轉移矩陣的條件即是正規馬可夫鏈，而這個系統在長期的情形下會處於穩定的情況，所以前述的平衡矩陣或會合矩陣即是所謂正規馬可夫鏈。而吸收馬可夫鏈是指當事件過程進入某一狀態後，即停留於其上無法離開，則此一狀態即為吸收狀態（Absorbing state），該狀態之轉移機率必等於１，即 $P_{ij}=1$；換言之，亦即轉移矩陣中，主對角線元素為１之狀態。吸收馬可夫鏈必需具備兩個條件：第一、至少有一個吸收狀態，第二、經過若干次試驗後，從每一個狀態均可以到達吸收狀態。所以吸收馬可夫鏈的一個基本性質是不論從任何狀態開始，經過多次試驗以後，其到達吸收狀態之機率必為１。為了分析方便起見，我們將吸收馬可夫鏈之吸收狀態集中在前面，而將非吸收狀態排列在後面，則可列出下面的標準型式，並推導出相關公式：(見下頁式五)

一般而言我們將 $N=(I-Q)^{-1}$ 定為基本矩陣（Fundamental matrix）[2]，而根據此基本矩陣，可以求知：1.馬可夫鏈在每一個非吸收狀態之平均停留時間。2.將

[2] 基本矩陣（fundamental matrix）涉及反矩陣的計算，而有關其意義、概念與計算方式，請參矩陣計算相關書籍，此不贅述。

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} r\text{ 個狀態} & s\text{ 個狀態} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline R & Q \end{array}\right) \end{array}$$

此一轉移矩陣共有r個吸收狀態及s個非吸收狀態
I 爲r x r 單一矩陣，O 爲 r x s 零矩陣
R 爲s x r 矩陣，Q 爲 s x s 矩陣

其高次轉移矩陣，根據Chapman-Kolmogorov 方程式可推得：

$$P^n = \left(\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline R+QR+QR^2+\ldots+QR^{n-1} & Q^n \end{array}\right)$$

由代數公式知:

$$(I-Q)(R+QR+QR^2+\ldots+QR^{n-1}) = I-Q^n = I$$

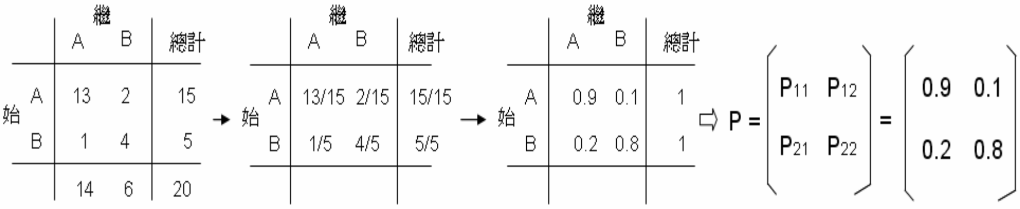
Q 矩陣內之元素均爲小於1者，當n逐漸加大時，Q^n 矩陣趨近於零矩陣

上式兩端各乘 $(I-Q)^{-1}$ 可得: $I+Q+Q^2+\ldots+Q^n = (I-Q)^{-1}$ ……（式五）

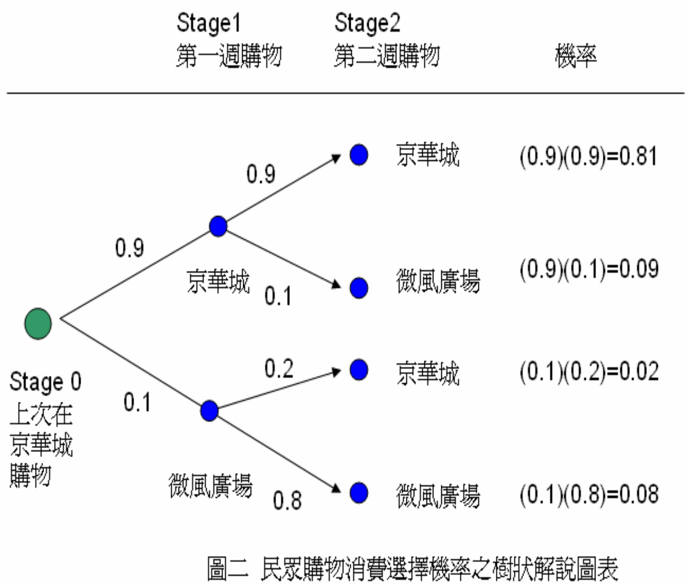
N 矩陣橫向就每一列求和，即得非吸收狀態開始到達吸收狀態平均所需之時間，其到達吸收狀態平均所需之時間（定義 t 為此項時間，e 為縱的求和向量，所有元素皆為 1 ，則 t ＝ Ne）。3. 從非吸收狀態開始，其被某一特定吸收狀態吸收之機率（即 NR）。

理論與數學模式的介紹十分抽象，理解不易，所以我們在此舉實例配合來強化解說。假設進行經濟地理議題中關於顧客消費地點偏好之研究，如果顧客消費地點僅限於京華城與微風廣場兩處百貨公司（即所謂有限狀態空間），又觀察出某一顧客在一年內進入京華城（A）與微風廣場（B）的購物更替過程是：「AAAAAAABBBAAAAAAAABBB」，則這些資料可以歸納為有四類：1. 以京華城（A）開始，繼續仍以京華城（A）為購物地者，計有 13 次；2. 以京華城（A）開始，轉繼卻變為微風廣場（B）為購物地者，計有 2 次；3. 以微風廣場（B）開始，轉繼卻變為京華城（A）為購物地者，計有 1 次；4. 以微風廣場（B）開始，繼續仍以微風廣場（B）為購物地者，計有 4 次；將這些數據化為百分數就可以製成所謂馬可夫鍊的「演變機率矩陣」（Transitional Probability Matrix, 參見圖一）。演變機率矩陣，雖然只能表示一個時期內的演變率，然而利用機率的相乘定律與相加定律，則進而可推演未來之演變，例如設顧客上次是在京華城（A）購

物，則下一次（假設為第一週）去京華城（A）與微風廣場（B）的機率依演變機率矩陣可知分別為 0.9 與 0.1 ，那麼再下一次（假設為第二週）去哪一家百貨公司購物的機率為何呢？利用樹狀圖來解說（圖二），我們可以得知第一週和第二週都在京華城（A）購物的機率為 0.81（0.9*0.9），而第一週在微風廣場（B）但第二週轉回京華城（A）的機率為 0.02（0.1*0.2），所以得知第二週會在京華城(A)的機率為0.83，同理亦可推知第二週在微風廣場（B）的機率為 0.17 （0.9*0.1+0.1*0.8）；循此亦可知第三週在京華城(A)的機率為 0.781 ，在微風廣場（B）的機率為 0.219…。所以我們可歸結並標註出Π(n)=[π A(n)　π B(n)]來代表發生在 n 時期間，其狀態機率（State Probabilities）的向量系統，並推導出這樣的一個公式：Π（n+1）=Π（n）P。同樣地，利用上述的樹狀圖和公式我們亦可得知若顧客上次是在微風廣場（B）購物，則下一次（亦假設為第一週）去京華城(A)與微風廣場(B)的機率分別為 0.2 與 0.8 ，下下次（假設為第二週）去京華城（A）與微風廣場（B）



圖一 利用數據製作成演變機率矩陣流程圖



圖二 民眾購物消費選擇機率之樹狀解說圖表

的機率分別為 0.34 與 0.66…。

利用樹狀圖式來計算各階段的所有機率變化實較為繁雜，故倒不如改用矩陣自乘法來替代（梁蘄善，1985），例如下一階段（假設為第一週）可以用演變機率矩陣的一次方表示，下下週（即第二週）可以用演變機率矩陣自乘兩次的二次方表示，下下下週（即第三週）可以用演變機率矩陣自乘三次的三次方表示，其結果相同（參見圖三），亦即重複自乘的演變機率矩陣可得到另一個代表該時期機率矩陣的變遷情形。然而如果我們一再重複自乘的演變機率矩陣，則我們可以發現到機率變化會漸趨一定的數值而不再變化，不論是從京華城（A）或微風廣場（B）來開始購物，次數越來越多後，統計到最後至京華城（A）購物的機率會穩定在 0.667，而至微風廣場（B）的機率則會是 0.333(註：此解法可由 1. $\pi A=0.9\pi A+0.2\pi B$　2. $\pi B=0.1\pi A+0.8\pi B$　3. $\pi A+\pi B=1$ 聯立方程式求得），換句話說若該顧客有 1000 次外出購物，則有 667 次會去京華城，而去微風廣場購物是 333 次，這就是馬可夫鍊模式理論中所說的：經過長時期的演變後，會達到所謂的穩定狀態機率（Steady State Probabilities）[3]。

[3] 如果馬可夫鏈為不可約 (irreducible)、正再現 (Positive recurrent)且無週期 (aperiodic)，則穩定狀態的機率便會存在，亦即此值與初始狀態如何並無任何關係。

公式 $\Pi(n+1)=\Pi(n)P$

下下週的機率（$[\pi A(2)\ \ \pi B(2)]$）$= [\pi A(1)\ \ \pi B(1)]\begin{pmatrix} P11 & P12 \\ P21 & P22 \end{pmatrix}$

則原本在京華城，下下週的機率 $= \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.83 & 0.17 \end{pmatrix}$

則原本在微風廣場，下下週的機率 $= \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.34 & 0.66 \end{pmatrix}$

利用演變機率矩陣自乘法

則下下週的機率 $= P^2 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.83 & 0.17 \\ 0.34 & 0.66 \end{bmatrix}$

狀態 機率（P）		時期（Stage）					
		0	1	2	3	4 …	∞
京華城	$\pi 1$（n）	1	0.9	0.83	0.781	0.747 …	0.667
	$\pi 2$（n）	0	0.1	0.17	0.219	0.253 …	0.333
微風廣場	$\pi 1$（n）	0	0.2	0.34	0.438	0.507 …	0.667
	$\pi 2$（n）	1	0.8	0.66	0.562	0.493 …	0.333

圖三 利用公式與重複自乘的演變機率矩陣之解說圖示表

穩定狀態機率可用來比較不同時期的事物變遷程度，我們可以再舉一個都市地理的人口遷移例子，假設台中市經過一年的觀察發現住在市中心的居民有 2%的人會搬遷至郊區居住，同一時間內則有 1%的郊區住戶會搬入至至市中心來生活，那麼如果台中市現有人口 100 萬，其中 40%住市區，60%住郊區，則若一切情形依馬可夫鍊模式理論發展，則台中市未來市中心與郊區的人口結構為何？經由下列的解答便可得知，未來台中市住市區的人口數會由40%降至33%，住郊區的人口數會由60%增至 67%。

解：

1.演變機率矩陣

	市中心	郊區
市中心	0.98	0.02
郊區	0.01	0.99

$$\rightarrow P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.98 & 0.02 \\ 0.01 & 0.99 \end{bmatrix}$$

2.聯立方程式：

1. $\pi A=0.98\pi A+0.02\pi B$
2. $\pi B=0.01\pi A+0.99\pi B$
3. $\pi A+\pi B=1$

$\rightarrow$ $\pi A=0.33$　$\pi B=0.67$

進一步地探討馬可夫鍊模式的機率理論，我們也會發現自然事物中有時會存在著一種所謂零機率（Zero Probability）的狀態，即所謂全有或全無的情形而無任何機率可言，例如排班公車每日出發會存在著機件良好可以上路或機件故障需送修而暫時無法上路的風險機率；但也會有一種情形發生，即機件故障嚴重無法修復，需報廢而永遠無法使用的狀況，也就是說一旦系統進入這個狀態，它就無法再跳出這個狀態了，此情形即是前文所稱的吸收狀態(Absorbing State)。要計算這種吸收馬可夫鏈，需要使用到所謂的基本矩陣(Fundamental Matrix)，此處舉一疾病地理的例子說明：設若某區發生禽流感(Avian Influenza)疫情，則人類受感染威脅可能有下列幾種情形：1.健康存活沒被感染，2.得病並且死亡，3.受感染但不嚴重，生存機會大，4.受感染且嚴重，死亡機會大。假定分析時間以一個月為單位，此時有 500 人正染病住院，300 人為輕微者，200 人為嚴重者，那麼這些人將來康復出院或不幸死亡的人數為何？此問題配合下列求解步驟所求出之基本矩陣 N，表示狀況 3 受感染但不嚴重者，在轉換成康復或死亡（吸收狀態）前，維持著受感染但不嚴重者的平均情形為1.67月，而轉成受感染且嚴重，死亡機會大的機會則為 0.56；同樣地，狀況 4 感染嚴重且死亡機會大者，轉成不嚴重者為0.56，而維

持於嚴重狀況則為1.30。而t的2.23與1.86則表示狀況3受感染但不嚴重者至康復或死亡的的時間為2.23個月，而狀況4感染且嚴重且死亡者至康復或死亡的的時間為1.86個月。另外NR則代表狀況3與狀況4轉為狀況康復（狀況1）或死亡（狀況2）的機率，所以300人為輕微者、200人為嚴重者的BNR答案為有415人會康復出院，85人則不幸死亡。

解：

Step1.建立演變機率矩陣

1.健康存活沒被感染
2.得病並且死亡
3.受感染但不嚴重
4.受感染且嚴重
（各機率見矩陣所示）

$$\rightarrow P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.4 & 0.0 & 0.3 & 0.3 \\ 0.4 & 0.2 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Step2.分割矩陣

	吸收狀態	不吸收狀態
吸收狀態	I	O
不吸收狀態	Q	R

$$\rightarrow P = \left(\begin{array}{cc:cc} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ \hdashline 0.4 & 0.0 & 0.3 & 0.3 \\ 0.4 & 0.2 & 0.3 & 0.1 \end{array}\right)$$

＊ I ：表示單位矩陣　O：表示零矩陣

Step3. 建立基本矩陣與計算

基本矩陣公式：$N=(I-Q)^{-1}$ 因 $(I-Q)=\begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.7 & -0.3 \\ -0.3 & 0.9 \end{pmatrix}$

故 $N=(I-Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 1.67 & 0.56 \\ 0.56 & 1.30 \end{pmatrix}$ （＊計算過程見相關文獻）

$$t=N e=\begin{pmatrix} 1.67 & 0.56 \\ 0.56 & 1.30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2.23 \\ 1.86 \end{pmatrix}$$

Step4. 求出NR與BNR

$$NR=\begin{pmatrix} 1.67 & 0.56 \\ 0.56 & 1.30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.4 & 0.0 \\ 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.89 & 0.11 \\ 0.74 & 0.26 \end{pmatrix}$$

設B為兩個因子向量，即正染病住院者的種類，所以 B = [300 200]

$$BNR = [\,300 \quad 200\,]\begin{pmatrix} 0.89 & 0.11 \\ 0.74 & 0.26 \end{pmatrix} = [\,415 \quad 85\,] \rightarrow$$

415人會康復出院
85人則不幸死亡！

參、馬可夫鏈模型在地理學的應用範例

馬可夫鏈理論雖最早被用於觀察物理現象，隨後則在管理科學(Management Science)與作業研究的決策分析上提供了頗多的助益，尤其近年來更廣泛應用在疾病醫療追蹤、金融保險探討、環境災害預測等自然與人文科學的相關領域上。而地理學門的引用也漸趨普遍，例如Brown（1970）曾利用於人口遷移的預測，而Kirkland則用來分析加拿大1953至1968年安大略省 Kingston市居民職業的變動情形，施正屏(2001)用來分析加入WTO後中共勞動力的轉移情形；Ak?ntug(2005)則運用來探討尼迦拉（Niagara）河的年河川水文補注量與氣候變動的關係，作為乾旱時期的預測與防治。但整體而言，馬可夫鏈理論在地理學門的最大貢獻，還是在於地貌變遷及土地利用等課題之探討，地貌變遷與土地利用是人類與環境互動過程的具體表徵，不同的經濟、社會、政治文化條件以及自然環境的限制，會呈現不同的土地利用方式，即人們利用與面對環境的變化，所表現出來的外在地表型態的改變情形，所以探討地貌變遷及土地利用變化是一種空間分析，透過圖像套疊與位置建立資料間的統計關係得以解釋空間變遷量、變遷因子與變遷趨勢等。

進行空間分析首要考慮乃為變遷型態的度量，研究者須先確實掌握土地使用改變的真實狀況，才能進一步的模擬及解釋土地使用的變遷。變遷型態的度量方法主要有：1.量的度量，2.空間型態的度量及3.衍生資訊的度量（丁志堅，2002；鄒克萬、張曜麟，2004）。所謂量的度量係指各類型土地利用種類所佔的面積，在時間序列上的增減情形，是最基礎之量測數據；空間型態的度量則是以點、線和面三種空間單元，分析土地利用坵塊（land parcel）在不同時間間中的幾何變化形狀，透過空間性幾何指標的運算，以量化方式呈現；衍生資訊的度量則是指將複雜的土地使用變遷資料，利用空間計量方法轉化為有系統的空間資訊，來進一步探索空間資訊，例如運用馬可夫鏈模式的重複自乘轉變機率矩陣，可以得知土地利用變遷是非單向過程，據而可比較土地利用的種類變化或變遷程度，作為模擬未來土地利用狀況之依據。

在此我們舉一土地利用變遷的研究範例來作說明，圖四-1、四-2、四-3為淡水地區不同時期的衛星影像圖，而理論上經歷一段時期後任何一種土地利用均可能轉變為另一種土地利用型態，所以假設要分析1987年1999年該區12年來土地利用的變化趨勢，其步驟一為先利用遙測影像軟體(如ERDAS)將此兩年的土地利用型態加以分類(如圖四-4所示為將1999年粗分為林地、建築用地與農地果園等半人工化的其他利用型態等三類，1987年則比照此分類操作）；步驟二為分別計算其所佔之面積（如果是採隨機抽樣調查，則需通過卡方檢定，證明是土地利用變化屬本質上之差異），並將此三個不同的土地依開發程度順序排列並轉換為一個九元素的轉變

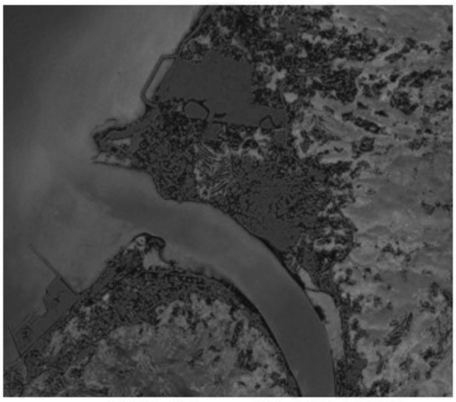
矩陣；步驟三則是重覆自乘轉變機率矩陣，求得其穩定機率值，來顯示各種類土地利用未來變化的理論趨勢。

下列解題過程中，可得知1987至1999年林地面積林地面積由40%升為46%，建地由32%升為35%，而其他型土地則由28%降為19%；其中對角線數據（劃底線）代表1987至1999年都未改變的土地利用面積（如林地在1987年為200公頃佔全部土地利用的40%，到了1999年仍維持為林地者是160公頃，佔80%；其他地為42公頃，佔30%；建地為112公頃，佔70%）；左下代表自然林地入侵置換了原來的人工的開墾區，右上則代表人工的開墾區取代了自然林地的情況，例如第三行顯示建築用地在1999年有174公頃，其中112公頃建地是不變的，而有20公頃是以前的林地，另有42公頃則是由原來的農地、果園等所謂半人工化的其他土地利用型態轉變而來；而假設一切條件不變之情形，則下一階段（即2011年）的演變機率則為P的平方，至於推演到最後穩定的狀態機率則分別為0.5、0.19與0.35。

1. 1987年淡水地區SPOT衛星影像

2. 2005年淡水地區SPOT衛星影像

3. 1999年淡水地區SPOT衛星影像



4. 1999年淡水地區SPOT衛星影像分類圖

圖四　淡水地區不同時期衛星影像圖

傳統上利用面積量改變的計算方法雖可瞭解在時間序列中各類地貌或不同土地利用型態的變化狀態，但卻無法掌握土地利用變遷的特性或提供深度的分析，Bourne（1976）與丁志堅（1997）都指出後來土地利用的狀況一定會受到先前土地分佈狀況之影響，也就是其計算的基線（Base Line）往往存有差異，所以單就面積量的改變來推估兩個時期的變遷程度可能導致錯誤的推論，因此要進行不同時期土地利用變遷程度的計量比較，必需加入其他的計量方法來分析。從馬可夫鏈模式運算的原理觀之，由於土地利用變遷狀況的理論趨勢值，是由空間單位內特定時期的各種類土地利用變化為轉變機率矩陣所推算而得，而此一機率矩陣是否具有代表性，來代表空間單元影響土地利用變遷的各種營力，便會影響其推算而得知理論趨勢值，因此空間單元要能反映出某種程度的區域內的均質性與區域間的特殊性，就會成為選擇度量土地利用變遷程度之空間單元的首要考量，從前述淡水土地利用變遷的範例可知，在短時期自然營力變化不大的情形之下，人文活動的影響與形塑就是影響土地利用變遷的重要因子，而要進一步的分析則可結合其他理論（如類神經分類、模糊理論、細胞自動化等）與近年發展迅速的衛星遙測、地理資訊系統等分析技術與工具，將能得更豐碩之成果；其實國內外相關之研究也如雨落春筍般出現，故文末整理一些結合馬可夫鏈模式與其他分析技術而應用在地理空間分析上的相關研究，提供比較與參考（表一）。

表一　馬可夫鏈模式與相關理論在地理空間分析之應用文獻舉隅

作者(年代)	研究內容
Bourne, L.S.(1976)	利用馬可夫鏈模式來監控加拿大幾個主要大都市的結構改變情形並評估計畫政策之衝擊。
LaGro Jr and DeGloria(1992)	運用地理資訊系統與遙測影像、馬可夫轉置矩陣、迴歸分析、相關分析探討該研究區中有關都市用地、森林用地、溼地、水體等土地利用變遷狀況，並證明土地利用變遷的影響因素，以及找出適合耕作或都市的土地發展的土壤屬性。
Aaviksoo(1993)	應用航空照片與地理資訊系統作結合馬可夫鏈模式探討 Estonia 地區的三個小區域 1950、1960 及 1980 年代各區不同土地利用變遷程度的趨勢，其運用轉變機率矩陣說明森林植披覆蓋與農田及農舍用地等各種土地利用數量的增減情形。

Boerner(1996)	研究 Ohio 地區的土地利用變遷時，利用 1940、1957、1971 和 1988 的土地利用資料，以馬可夫鏈模式分析比較此區之森林、農地、都市與工業用地等土地利用變遷狀況，也利用不同時間間隔的土地利用資料，比較運用馬可夫鏈模式預測未來土地利用分布狀況的差異。
林金樹(1996)	利用衛星影像、馬可夫鏈模式以及脊回歸分析探討大台南地區都會區與非都會區的都會區：裸地、建地、林地、溼地、農地等景觀組類變遷。
丁志堅(1997)	用馬可夫鏈結模式推導出不同時期的農業用地、建成地、水產養殖地等土地利用變遷理論趨勢值，度量土地利用變遷趨勢，然後應用群集分析度量土地利用在時間與空間上的變化情形。
張右峻(1998)	利用不同年度的SPOT遙測影像、類神經網路分析與馬可夫鏈模式探討台中市大坑地區各個時期土地利用型態與環境變遷之情形。
姜聖華(2000)	結合遙測影像中的航空照片與地理資訊系統，配合馬可夫鏈模式的計算，找出花蓮都市地區 20 年間農地、林地、草生地、溼地、建成地、軍事用地、裸露地等土地利用變遷的趨勢。
賴進貴（2000）	介紹結合細胞自動器(cellular automata，CA)模式與地理資訊系統，提供土地利用、都市模式與各種地理變遷現象的模擬和校正。
鄒國信(2001)	利用馬可夫鏈模式來探討民國 70、76、83 年的樹林地區農地、建地、水利、空地等土地利用變遷趨勢。
方琮雅(2001)	將桃園台地原始土地利用分成水域用地、農業用地、建成地及其他用地等四個種類，並運用馬可夫鏈模式推導出不同時期的土地利用變遷理論趨勢值，度量土地利用變遷的趨勢。
朱會義、何書金、張明(2001)	以北京市土地利用變化為實例，從 GIS 的時空資料模型、屬性資料模型和土地利用變化特徵的原理模型等三方向來分析其土地利用的空間變化。
Jenerette and Wu(2001)	以馬可夫鏈細胞自動化模型探討變遷，並以生態指數模擬不同年份的美國中部亞利桑納的都市變遷轉置機率，以模擬未來發展成為都市的分佈狀況。

楊剛(2003)	應用遙測、ＧＩＳ、地景指數運算來探討墾丁國家公園土地利用類型的空間分布，並利用馬可夫預測模式模擬此國家公園之地景動態變化。
廖怡雯（2003）	以數個年度的台中市衛星影像進行土地使用分類，然後以利用馬可夫鏈模式的計算求得各種類土地利用變化狀況的理論趨勢值，用以比較各種類土地利用的變化狀況並分析台中市的空間發展歷程。
Baoquan(2004)	以馬可夫鏈研究大陸新疆的綠洲地區 1982-1995 年期間土地利用的轉變，研究指出農作地、廢耕地、果園及沙地之間的轉移機率達 40%，綠洲整體的變化有逐漸擴大的趨勢，土地利用類型轉移的因素與當地的水源及綠洲的微氣候環境有關。
鄒克萬、張曜麟(2004)	利用個體選擇理論與空間分析方法，建構土地使用變遷空間動態模型，並以台南市為例進行個案實證研究，結合地理資訊技術，進行模式校估及分析，以瞭解土地變遷的空間分佈、意涵與機制。
Zhang C, & Li W., (2005).	利用二維馬可夫鏈和GIS軟體來模擬中國雲南國家公園地區土地利用分類的變化情形，提供作為空間不確定分析（spatial uncertainty analyses）與風險評估之參考。

註：部分資料資料來源整理自廖怡雯(2003)

四、結語

馬可夫鏈模式是一種利用機率矩陣所進行的模擬分析法，近年來在各學科領域的發展與運用也十分廣泛，本文結合馬可夫鏈的理論與實例，簡要說明此模式在地理空間分析之方式與功能，盼能引發更多讀者的興趣與迴響；尤其隨知識與科技之進展，馬可夫鏈模式也結合許多新的理論與技術，不斷融入地理與相關學門的應用上，提供更多解讀環境變遷與發展趨勢的參考訊息，也有助於人類永續利用的發展。

參考文獻

丁志堅（1997）運用馬可夫鏈模式度量土地利用變遷之研究，台灣大學地理研究所碩士論文。

朱會義、何書金、張明(2001)土地利用變化研究中的GIS空間分析方法及其應用，地理科學進展，20（2），pp.104-110。

林育瑋（2000），土地利用區位及立地條件之空間分析?以中和市爲例，中國文

化大學地學研究所碩士論文。
姜祖恕(1985)馬可夫鏈簡介，數學傳播，9（3），pp.43-49 。
施正屏(2002)加入 WTO 中共勞動力移轉對我國經濟影響之分析，農政與農情，第 118 期，臺北：行政院農業委員會。
洪彬皓(2002)應用模糊馬可夫決策發展自由化電業市場多狀態競價策略，中原大學電機工程研究所碩士論文。
書玉春、陳鎖忠等（2005）地理建模與方法，科學出版社，北京。
高孔廉、張緯良（1993）作業研究，五南圖書出版公司，台北。
張右峻(1998)利用類神經網路探討土地利用型態與環境變遷之研究，逢甲大學土地管理學系碩士論文。
梁蕲善(1985)地理學計量分析，中國文化大學出版部，台北。
楊剛(2003) 遙測資訊應用於墾丁國家公園地景生態變遷監測之研究，屏東科技大學森林學研究所碩士論文。
楊超然(1980)作業研究，三民書局，台北。
廖怡雯（2003）運用馬可夫鏈模式於台中市土地利用變遷之研究，逢甲大學土地管理所碩士論文。
趙大鵬（2004）定量地學方法及應用，高等教育出版社，北京。
賴進貴（2000）細胞自動機與地理資訊系統結合之初探研究，中國地理學會會刊，第 28 期， pp.109-126 。
鄒克萬、張曜麟(2004) 都市土地使用變遷空間 動態模型之研究，地理學報，第 35 期， pp.35-51 。
Anderson, D. R., Sweeney, D. J., and Williams, T. A.,(2000) An Introduction to Management Science: Quantitative Approaches to Decision Making, South-Western, Thomson Learning, Mason, OH.
Ak?ntug B.& Rasmussen P.F.,(2005) A Markov switching model for annual hydrologic time series, Water Resources Research, 41（9）.
Bourne, L.S.,(1976). Monitoring change and evaluating the impact of planning policy on urban structure: a Markov chain experiment. Plan Canada. 16(1): pp.5-14.
Bremaud, P., (1999). Markov Chains: Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation, and Queues: New York: Springer.
Zhang C, & Li W., (2005). Markov Chain Modeling of Multinomial Land-Cover Classes, GIScience and Remote Sensing, Vol.42(1), pp.1-18.