科學教育研究與發展季刊 Research and Development in Science Education Quarterly
2009，第五十三期，70-99 頁 2009, No.53, 70-99

探索一位五年級兒童平面線對稱前置概念之個案研究

陳莉萍 陳冠州*

桃園縣立建國國小

*kuanjou2005@gmail.com

（投稿日期：2009年4月20日；修正日期：2009年5月9日；接受日期：2009年5月14日）

摘 要

本研究主要目的在探索一位國小五年級兒童的平面線對稱前置概念的理解。研究中透過教學晤談法對國小五年級學童一小志（假名）進行十一次的教學晤談。根據分析結果，本研究歸納出小志的平面線對稱前置概念具有以下特性：

一、將鏡軸當成摺線，使得鏡射活動與線對稱活動產生關聯。
二、知道對稱軸兩側對應圖形全等。
三、對稱軸兩側對應點在同一線上，並且至對稱軸的連線段等長。
四、對稱軸兩側對應點與對稱軸的連線段不與軸線互相垂直。
五、透過釘點間的水平與鉛直位移決定對稱軸兩側對應點的位置。

關鍵字：教學晤談法、基模論、線對稱概念

壹、緒論

對稱 (symmetry) 是幾何、自然和形狀裡的本質，透過對稱可以創造樣式(patterns)並協助我們組織世界。對稱可以從日常生活中接觸到，表面上，雖然不是和數學有非常直接的關聯，但對小學生卻是學習數學的重要基礎 (Knuchel, 2004)。美國數學教師協會 (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000) 亦指出，就人類的思考來看「圖形」，對稱是不可或缺的要素。對稱不僅是在作為連接幾何、代數和函數等數學的關鍵性窗口，許多研究 (Hoyles & Healy, 1997; Knuchel, 2004; Mackrell, 2002) 發現對稱圍繞於我們週遭，即便它不具有明顯的數學性，卻深深的根植於數學之中。這顯示出對稱概念的重要性，尤其，在小學階段的發展需要有更多不同的研究觀點和發現，以利幾何教學與學習的進行。

國內幾何教材多半聚焦在基本形體及其特徵的探索與了解。八十二年課程標準（教育部，1993），有關對稱概念始於二上，透過摺紙、剪紙、鏡射等活動來學生觀察並經驗線對稱的現象，到六上才經由操作活動，認識並製作線對稱圖形。九年一貫暫時和正式課程綱要（教育部，2001，2005）則是在階段二（3-5年級）才開始進行辨認平面圖形上的線對稱關係，而後在階段三（6-7年級）再了解平面上線對稱的意義，最後在階段四（8-9年級）讓學生利用垂直平分的概念檢驗對稱軸。然而，若與NCTM (2000) 的課程目標：學前階段至二年級是透過摺紙與鏡射，經驗對稱圖形；3-5年級要能確認並描述線對稱的現象；以及6-8年級要能利用一些變換 (transformation) 檢驗物件的線對稱逐一比較，很明顯地和我國的課程階段上有不少的差異，值得進一步研究與探討。

有關對稱概念的研究，小學階段主要聚焦在教學實驗 (teaching experiments)，而且由於它的特殊性質使得對稱經常會透過科技軟體做為解題工具 (Edwards, 2003; Hoyles, et al., 1997; Markrell, 2002; Seidel, 1998) 。雖然，以科技軟體作為解題工具有其新奇性與便利性，但解題表現中被工具所取代的部份也可能正是學生所缺乏的認知，使得關於對稱概念較深層的認知結構無法進一步了解。有鑒於此，本研究擬以教學晤談 (teaching interview) 做為探索兒童線對稱概念的研究工具，並從基模論的認知觀點深入了解關於兒童在線對稱情境下的解題活動性質，以提供有關兒童線對稱概念在課程與教學的參考。

據上所述，研究主要目的為：

一、透過晤談，探索五年級兒童平面線對稱問題的解題表現。

二、從兒童的解題表現，了解五年級兒童平面線對稱概念的特性。

貳、文獻探討

一、知識論立場與心理學的理論背景

本研究目的在了解兒童如何解決平面線對稱問題，並說明其解題活動類型，藉以描述兒童的平面線對稱概念，因此必須對知識論的主張與心理學理論基礎逐一闡釋，以作為本研究擬定訪談問題及實施晤談時的基本立場。

（一）知識論立場－根本建構主義 (radical constructivism)

受到Piaget的影響，von Glasersfeld (1989) 從哲學、心理學及神經機械學等多元觀點提出了根本建構主義在知識論上的兩點基本主張 (von Glasersfeld, 1989；甯自強，1993a) ：

1. 知識並非由被動的吸收而得，而是認知之個體主動建造構築而來。
2. 知識獲得的方式是調融的，認知的功能是用來組織外在的經驗世界，而非用來發現已存在的本體現實 (ontological reality) 。

以 von Glasersfeld 觀點來看，個體所有的經驗都是從個體知覺的唯一世界而來，在本質上是主觀的，所以，不同個體的經驗是不相同的。此外，他所強調知識的本質對於知識的建構或獲得過程中乃扮演一個支持性的角色 (Smith, 1997) 。就此，根本建構主義主張知識僅是個體為了在環境中生存，所產生的經驗類型，這些類型是相對的、功能的，並且是演化的（甯自強，1993b）。以本研究來說，經驗類型除了是兒童平面線對稱的成功解題活動外，更是在某一專家社群下所同意的活動類型、性質及其意義等結果。

此外，根本建構主義重視學習個體的主動性與自身的經驗組織。因此，兒童的「平面線對稱概念」活動及其活動後的意義性質，在本研究中是指一組類化後的闡釋，此項闡釋是由研究者的觀點來描述兒童如何說明他所遭遇到的問題，以及他所擁有能達到解答的各種方法和歷程。

（二）心理學的基礎－基模論 (scheme theory)

基模論為Piaget對個體的認知行為所提出的一項主張。基模是可以重複使用，或進一步推廣的運作系統，不論是活動的類型或心智上的動作，它們是用來改變情境的狀態，作為同化 (assimilation) 的工具 (von Glasersfeld, 1980) ，因而基模論與根本建構主義是相容的（甯自強，1996）。據此，本研究對於有關兒童「平面線對稱概念」的解題活動類型說明，將以Piaget的基模論為架構並加以闡釋。

von Glasersfeld (1989) 受到Piaget發生知識論 (genetic epistemology) 的影響，對一個基模下了一個操作型定義，以彰顯基模的特質。本研究同樣採取這樣的見解，認為基模可分為三個部分 (von Glasersfeld, 1989；甯自強，1993b) ：

1. 首先，有一個同化後的初始經驗情境，用來引發 (trigger) 行動或運思 (operation)（指內化 (internalized) 後或概念上的活動）。
2. 接著有一個行動或運思。
3. 最後，產生一個活動後的成果或續局 (sequel)。

因此，若研究者欲說明兒童具有某種「平面線對稱概念」的性質，即是說明兒童具有某些特定的基模，而這些基模是用來解決平面線對稱問題的。以von Glasersfeld (1995) 的操作型定義來說明，其行動基模的類型 (pattern of action scheme) 也就是感官知覺的學習基本原則包括三個要素（如圖1）：

1、知覺情境 ⟶ 2、活動 ⟶ 3、利益或所期待結果

圖 1 行動基模的類型 (pattern of action scheme) (von Glasersfeld, 1995)

在本研究中基於行動基模的類型，研究對象在某一特定情境下的平面線對稱解題活動即是根據此種行動基模類型來做為闡釋原案分析的模式。換言之，在進行原案分析時將區分三個部份，首先說明問題情境，其次分析兒童解題活動，最後進行歸納兒童解題活動的類型（如圖2）。

1、對稱概念的真實情境 ⟶ 2、兒童解題活動 ⟶ 3、解題活動的類型

圖 2 晤談情境下兒童解題活動基模的類型

當研究者欲主張兒童有某類「平面線對稱概念」類型時，必須說明兒童將有關線對稱概念的問題當成何種問題情境，問題情境中的構成要素以哪一種形

式進行操作，操作之後，對操作的結果有無續局，以及續局的情形。然而，為了推知兒童的特定基模，研究者僅能由兒童的外顯行為加以觀察，也就是針對兒童的解決問題的活動和兒童的本身說明進行閱讀與解釋。

二、線對稱的意義

以下對於線對稱意義的說明及相關研究的探討，將作為擬定晤談問題及分析、詮釋資料時的依據。對稱可分為線對稱 (line symmetry) 及旋轉對稱 (rotation symmetry) ，而點對稱為旋轉對稱的一種。由於線對稱乃是幾何中變換 (transformation) 一個重要的基礎，因此先就這部份加以探討。

（一）變換幾何 (transformational geometry)

變換幾何包含了空間中的圖形的相對位置、全等及對稱關係，其中對稱包含了三種主要的動作 (motion) 類型 (Souviney, 1994) ：

1. 翻轉 (flip) 的動作做出反射全等 (reflection congruence) ：將平面翻轉 180º，產生位移，而圖像從原來的正面（有點）轉為反面（無點）（如圖3）。

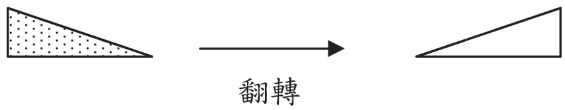


圖 3 翻轉動作

2. 移動 (slide) 的動作做出平移全等 (translation congruence) ：在平面上透過垂直或水平的移動，使原物件的位置產生移動的現象，如向右移動（如圖4）、向下移動（如圖5）、向右移再向下移而產生的斜角移動（如圖6）。

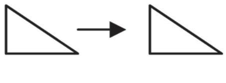


圖 4 水平移動

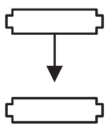


圖 5 鉛直移動

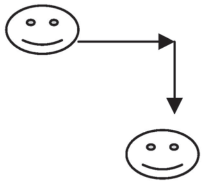


圖 6 斜角移動

3. 轉動 (turn) 的動作做出旋轉全等 (rotation congruence) ：平面上，透過旋轉活動產生位移，而圖形與呈現的圖像不變（如圖7）。

圖 7 轉動動作

當幾何圖形經由此三種動作之後，變換出的新圖形與原幾何圖形的大小及形狀皆完全相同。其中就翻轉的動作而言，若一圖形的一半經由翻轉動作後，兩半能處處密合，兩側的點可以完全重合，摺線兩側的圖形摺成反射全等。換言之，將此圖形沿著一條直線對摺時，摺線能將圖形分為全等的兩部分，這便是線對稱的直觀意義，而摺線即為對稱軸的位置。以下將有關線對稱的定義作一說明。

（二）線對稱的定義

1. 簡明數學百科的線對稱的定義（洪萬生等譯，1979）：

任一平面E被其上任一直線s分割成二半平面。將任一半面在空中以s為軸作180º旋轉可映射到另一半面。而在軸s上的任一點S將映射到本身，S＝S' ，即軸為固定線。軸s兩側線段與S所夾之角相等，且兩線段等長，點與其映射點連線垂直於s且被s平分。每一圖形F全等於其映像F' 。

將半平面反射在垂直於平面E，且與E之交集為S的鏡子上，其結果與以上所討論是相同的。因此F與其映像F' 可稱互為鏡像或互為反射，這個映射可稱作直線上的反射。

2. 線對稱概念群的子概念（朱建正，1997）：

（1）幾何變換，也就是把線對稱看成平面上的鏡射。

（2）在鏡射下不變的圖形，也就是一側的鏡像完全是另一側的圖形，反之亦然。

（3）生成的概念，也就是對一個任意圖形，在指定對稱軸後，可以完成一個包含此給定平面圖形的最小對稱軸圖形。

3. 國民小學數學科實驗課程教師手冊（國民學校教師研習會，1995）：

（1）操作型定義

此操作型定義為直觀的概念。若一圖形可沿著某一直線對摺，使直線

兩側完全重合，這種圖形稱為關於此摺線的對稱圖形，簡稱為線對稱圖形。

（2）幾何上的意義

一個圖形，若可以找到一條直線將其平分成兩半，在其中一半內的任何點，都可以在另一半內找到一個對應點，使得這兩個互相對應的點所連成的直線段，恰好被平分此圖形的直線垂直平分，這個圖形即為一種線對稱圖形。

（3）線對稱圖形的作圖策略

<u>圖形的關鍵點</u>

舉例來說，一個多邊形，若確定其頂點位置，便可畫出此圖形的邊，確定形狀、大小，這樣的點被稱為圖形的關鍵點。我們可利用圖形的關鍵點畫出各種直線段形成的對稱圖形。

<u>作圖策略</u>

畫出線對稱圖形有許多不同的方式，舉例如下：

a.剪圖法：將一張紙對摺後，在其上適當位置剪一個圖形，再將紙打開，即得到一個線對稱圖形。

b.描畫法：利用雙面複寫紙或單面複寫紙畫出線對稱圖形。

c.利用對稱軸垂直平分對應點的連線段的特性。

綜合上述，線對稱圖形是一種圖形變形轉換的結果，屬相等變換，可以在空間中翻轉180º的動作形式加以描述線對稱圖形的關係。此外，線對稱圖形中對稱軸一側的圖形皆能在另一側找到對應圖形，軸線兩側對應線段須等長，兩側對應點連線恰好被對稱軸垂直平分。而這些都將是形成晤談內容的重要參考。

三、線對稱的相關研究

有關兒童線對稱概念的研究，早期有Hoyles等人 (1997) 利用所設計的電腦軟體以增進學生線對稱概念的學習。而後，Healy (2004) 進行關於學生線對稱概念中幾何變換的學習系統如何拓展到與學校所教導的知識連結的研究調查。Son (2006) 則研究教師如何利用教學策略協助改善學生的線對稱迷失概念。這些研究除了顯示出線對稱在幾何概念發展上的重要性，也提供可以增益線對稱學習的具體方法。在學習方面，劉湘川、劉好、許天維與易正明（1993）的研究指出，國小中年級學生大部份僅及van Hieles幾何思考階段論的階段0水準，

有一些達到階段1水準，接近階段2者為極少數。因此，在國小階段處理線對稱圖形時，若兒童在辨識幾何圖形方面，處於視覺直觀階段，也就是根據所給定的圖形形狀仿做一個類似的輪廓，將圖形所呈現的外形當成一個整體，而不是藉由一般應用的幾何性質時，對稱圖形的教學宜透過圖形的疊合或摺合的操作活動來確定，讓兒童經驗線對稱圖形，但不宜用對稱的數學定義進行指導。若兒童已達階段1，能考慮圖形中構成要素已掌握圖形時，對稱圖形教學則可引入線對稱圖形的構成要素，認識其對稱軸、對應點、對應邊與對應角等，亦可嘗試將線對稱的具體定義推導至平面幾何學的定義，並製作線對稱圖形。關於對稱概念中對應邊與對應角的實務教學，Wilson 和 Adams (1992) 則指出在教學上需透過實際的活動來協助學生發展邊和角的概念，也就是先給學生一個角的圖形，然後，讓他們在對稱軸的另一邊進行補圖活動。無論是線對稱教學或學習上的研究，若要有效解決這兩方面的問題，對於學生線對稱概念的內涵和意義的了解將是不可或缺的，有鑑於此，本研究側重在探索學生關於線對稱概念的意涵，以提供一些實徵性資料作為教學與研究上的參考。

參、研究方法

一、教學晤談法 (teaching interview)

基於研究的知識論立場，本研究的焦點在透過兒童的解題活動類型，以探索其平面線對稱概念。因此，研究者將採用教學晤談法 (Ning, 1992) ，其主要的目的在觀察兒童於問題情境中所展現的解題活動，此活動視為兒童概念學習的結果，研究者依據兒童外顯的解題活動與反思活動，推測兒童如何使用線對稱概念，進而提出下一個問題以檢驗研究者本身的假設。而實施步驟主要有三：首先向兒童提問並要求解題；其次，依據兒童解題表現提出進一步的問題，以釐清兒童解題方式和相關意圖；最後，透過溝通晤談的互動模式，持續到研究者提問相關問題或訪談時間結束為止（陳冠州，2008）。

二、晤談問題的內容與結構

線對稱概念其子概念是把線對稱看作為平面上的鏡射，並且在鏡射下，圖形不會改變，因此，本題型以鏡射活動所產生的「鏡像」為主要問話用語。目的在瞭解兒童線對稱的生成概念，也就是對一個任意圖形，在指定對稱軸後，所能完成包含此給定平面圖形之最小對稱軸圖形，研究者並藉由此類問題，瞭解兒童在缺乏鏡子操作時，對鏡射活動所產生的鏡像其掌握程度，以及進行的鏡射活動能否與線對稱活動產生相關。根據劉湘川等人（1993）的研究指出中年級兒童在製作線對稱圖形時，在方格紙上畫圖較易，在釘點紙上次之，白紙上最難，因此研究者擬以釘點紙為主，讓兒童較能掌握距離與方向，給定的對稱軸為鉛直、水平與傾斜45º等三種不同形式。問題圖形則分為以下七類，並全在釘點紙上製圖：

1. 圖形為一個點：

   例：這張釘點紙上有個點和一條直線，假如有面鏡子在這條直線上，你畫畫看鏡子裡的點在什麼地方？

2. 圖形為一條線：

   例：這條線上放一面鏡子，鏡子外有一個直線，鏡子裡的直線在什麼地方？

3. 圖形為三個點：

   例：這張釘點紙上有三個點，你畫畫看鏡子裡的三個點在什麼地方？

4. 圖形為一個角：

   例：這條線上放一面鏡子，鏡子外有一個角，鏡子裡的角在什麼地方？

5. 圖形為兩條線：

   例：釘點紙上有兩線段，鏡子裡的這兩條線段在什麼地方？

6. 圖形為三角形：

   例：釘點紙上有一個三角形，鏡子裡的這三角形在什麼地方？

7. 圖形為＃：

   例：釘點紙上有一個英文字母X的圖形，鏡子裡的這個圖形在什麼地方？

有關晤談問題的詳細內容則以下面補形類型的問題為例，此類問題所給定的對稱軸分別為鉛直、傾斜45º與水平三種，研究者依對稱軸的三種形式進行提問（表1）。

表 1 晤談問題的詳細內容

情境	問題	目的
1.在受訪者面前佈置已給定對稱軸的對稱圖形，但其鏡像圖形缺乏某些構成要素。	1.這條線的地方放一面鏡子，鏡子裡的圖有些沒畫到，你能不能把它補畫起來？畫畫看。	1.調查兒童是否能將缺乏某些構成要素的圖形補畫完成。
	2.說說看，你是怎麼畫的？	2.調查兒童補形的過程。
	3.你確定這樣畫就補好了嗎？	3.調查兒童補形的理由。
2.在受訪者面前佈置已給定對稱軸的對稱圖形，但其對稱軸兩側的圖形皆缺乏某些構成要素。	1.這條線的地方放一面鏡子，鏡子內外都有些部份沒畫到，你能不能把它補畫起來？畫畫看。	1.調查兒童是否能將缺乏某些構成要素的圖形補畫完成。
	2.說說看，你是怎麼畫的？	2.調查兒童補形的過程。
	3.你確定這樣畫就補好了嗎？	3.調查兒童補形的理由。
3.在受訪者面前佈置已給定對稱軸但只有對稱軸一側的圖形。	1.這條線的地方放一面鏡子，你能不能選一個圖是鏡子裡的圖呢？選選看。	1.調查兒童是否能選擇鏡像圖。
	2.說說看，你是怎麼選的？	2.調查兒童選擇的過程。
	3.你怎麼知道選這個？	3.調查兒童選擇的標準。

三、受試者的選擇

本研究的受試者為一位五年級的學生－小志（假名），就讀桃園縣某國小。受試者的選擇有以下考量：

（一）受試者的程度至少需為數學表現中上，尚未學過平面對稱概念，成績不錯，但非資優或學習低落的學生。

（二）就教學晤談法而言，口齒清晰、說話流利、表達意願較強、並樂於進行探索的受試者較理想。

（三）基於研究倫理，必須經由受試者的父母或監護人同意。

四、晤談實施步驟

（一）擬定晤談問題初稿

為達成目的，首需找出有關平面線對稱的關鍵性問題，所謂關鍵性問題是指能讓兒童表現出平面線對稱的圖形特色及構成要素的掌握程度等活動的問題。研究者乃據此一原則，完成晤談問題初稿。

（二）前測晤談

訪談問題採用四位國立大學數學教育系以及數學系專精於兒童數學概念發展之研究學者所組成的專家群效度。經指導修正後，晤談內容即以晤談問題初稿為藍本，對象為三位五年級的兒童。前測晤談過程皆加以錄影，經由研究者之後對影帶中兒童的解題活動及提問過程進行反省，再與指導教授共同討論，逐步的修正與增減晤談問題初稿以形成正式晤談問題。

（三）正式晤談

本研究共實施十一次晤談，每次晤談時間約四十分鐘。晤談地點為較安靜的社會教室，訪談過程不易受到干擾，現場除教室內的桌椅，另架設攝影機作為拍攝之用。在每次正式晤談後，研究者須針對訪談過程做出摘要記錄，並登記訪談問題分布，以作為下次訪談提問的依據，並避免提問不均的情形發生。

五、資料整理與分析

（一）晤談過程的轉譯 (transcribing)

教學晤談主要使用紙筆情境。當晤談時，以一部V8攝影機錄下兒童進行活動的過程。因此，轉譯資料的來源為錄影內容，以研究者與兒童的對話為主軸，再配合紙上的作圖紀錄、物件的操弄與兒童的解題活動結果畫面，並輔以兒童的動作做為說明，以期能具體的呈現影帶內容。

（二）轉譯內容 (working transcripts) 編修成晤談原案 (protocols)

在訪談過程轉譯後，為了讓轉譯的資料更能切合兒童意圖及真正的活動情境。首先，刪除與訪談目的無關的對話，如寒喧、閒聊等，接著，對於不利閱讀的口語化文句加以刪增並潤飾。在臨床晤談法的資料分析中，必須將兒童因

受訪者建議而做出的反應與兒童本身的自發性反應加以區分，因此，在教學晤談法中，也須適當的刪除因研究者介入所產生的反應，即轉譯內容將再針對研究者所做的教學介入及兒童因而產生的反應加以檢視並刪除，以確保觀察行為的品質 (Ning, 1992) 。藉由以上工作使轉譯資料成為有系統、有意義的晤談原稿，再將晤談原稿中研究者與兒童的對話依訪談先後順序逐一編碼。

（三）原案分析（protocols analysis）

先將訪談原稿分類，再進行原案分析。由於晤談原稿是依師生的對話活動逐一紀錄與編碼，未將不同類型的問題予以分類，因此，必須先區分晤談原稿中不同的問題，再按問題的類型進行重組。也就是先以一個一個的解題活動情節 (episode) 當做分類的單位，晤談原稿中一個問題的對答視為一個段落，將原稿切割為資料分析的單位，接著進行情節的劃分 (chunking) ，其標準是依據訪談問題的性質及對話的始末。

分析時，先從同一類情節中抽取出解題活動的方式，再將解題方式一一進行比對，分析出彼此的異同並予以分類，提出兒童在同一類解題活動所展現的解題策略。其次，再與其他類情節中的解題策略進行比對，分析出不同的解題活動策略的類型，並藉由不同的解題活動策略類型逐一比對，抽出受試者的平面線對稱概念類型。因此，個案研究報告在說明概念類型的內容時，所呈現的案例是研究者認為解題活動中較具特色或代表性的。描述分析時，則依據基模的三部份撰寫，即先說明問題情境、展現的解題活動與結果，並說明原案中兒童施行的活動，再討論由原案中可推測出什麼解題行為，佐以原案行次的記錄做為例證。

關於研究信效度之處理，由於晤談時可能受研究者的偏見、偶發事件影響，因此整個比對、分析與歸納的過程必須交錯的 (triangulated)、辯證的 (dialectical) 。再加上研究者僅能看到本身所理解的部分，但隨著分析過程的進行，研究者理解的部分也可能有所改變，所以整個分析過程為一變動的歷程。對此歷程，研究中則透過訪談者資料、研究者本身與專家群之間的三角校正 (triangulation)，並對轉譯資料的分析進行恆常比較 (constant comparison) 等方法，經過研究者反覆檢視後，才能獲得最具一致性的闡釋，使得建立的類型更加精緻化，以增加研究結果的可信賴度 (trustworthiness) (Denzin & Lincoln, 1994) 。

肆、結果與討論

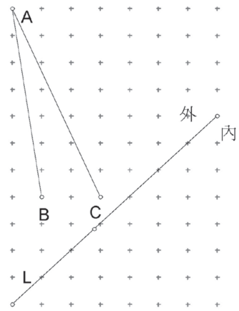
在實際情境中，研究者提供釘點紙並在紙上畫出一條代表鏡子的直線，呈現完整的鏡外圖形，請小志利用直尺和筆依問題要求在釘點紙上做圖，也就是在鏡子的另一側畫出對應的鏡像圖形。

平面線對稱圖形就幾何變換觀點可視為平面上的鏡射，若以生成概念言之，在指定對稱軸後，對一個任意圖形，可以完成一個包含此給定平面圖形的最小軸對稱圖形。以下的解題活動類型即是在指定鏡子的位置，給定一問題圖形後，請受訪者製作對應鏡像的活動，藉以了解其線對稱概念。

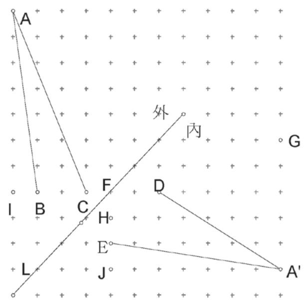
一、將鏡軸當成摺線，使得鏡射活動與線對稱活動產生關聯

晤談中的鏡射活動是指一給定圖形和鏡子的位置，描繪出鏡內影像的活動，而線對稱活動則是指製作線對稱圖形的活動。小志將代表鏡子的直線當作對摺線，認為摺疊後，鏡子兩側的圖形會完全重疊，這表示鏡射活動與線對稱活動相關，以原案1為例說明。該問題鏡子向右傾斜45º，給定圖形為鏡子左方的一個角，角的兩邊不與對稱軸垂直或平行，也未通過任何釘點，請小志做出角的鏡像。

原案1



作圖前



作圖後

1336. 生：我先做一個先用鉛筆畫這是我取距離的一個……（畫出$\overline{A'J}$ 、$\overline{AI}$ ）.。

1337. 師：方法。

1338. 生：點在這裡（取出A′）

1339. 師：你現在取的是你自己鉛筆的那條。
1340. 生：對（畫出$\overline{A'D}$、$\overline{A'E}$，畫完後，再次點數），鉛筆那條可以擦掉
1341. 師：沒關係，你可以把它留著。
1342. 生：好了。
1343. 師：你說一下為什麼剛剛要取那個鉛筆的？
1344. 生：因為鉛筆的部分，直的（$\overline{AI}$）會變成橫的（$\overline{A'J}$）。
1345. 師：直的就會變橫的，這是你做很久之後發現的？
1346. 生：沒錯。
1347. 師：為什麼直的會變橫的呢？
1348. 生：因為鏡子，如果你把它摺起來，直的線會變橫的，我也不知道為什麼，做久了就知道，我先取這一條橫線（$\overline{A'J}$）。
1349. 師：那你那一條怎麼取出來的？長度多長？
1350. 生：一、二、三、四、五、六、七（點數$\overline{AI}$），七個。
1351. 生：我不知道怎麼畫出來的
1352. 師：有啊，你剛不是已經講了嘛？
1353. 生：可是這三個在同一條線上（I、B、C），這三個（D、E、J）沒有。
1354. 師：沒有在同一條線上。
1355. 生：對呀，所以我就說不知道呀。

一開始小志一直想不出作圖的端倪時，曾說「這個又不能讓我摺」，顯示出若可以摺疊，就能夠找到製出鏡像的線索。之後，行1347研究者問及「為什麼直線會變橫線？」，小志提出的理由仍是摺疊的方式，他說：「因為鏡子，如果你把它摺起來，直的線會變橫的，我也不知道為什麼。」由此可知，小志在解決此類線對稱問題時，會以表示鏡子的線段當成是摺線，並在心裡想像對摺的動作，由於鏡子傾斜45º，鏡子外的直線經由摺疊就變成橫線。

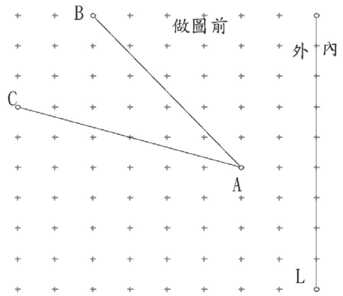
根據線對稱圖形的操作形定義，若一圖形可沿著某一直線對摺，使直線兩側完全重合，這種圖形稱為線對稱圖形。小志認為鏡外圖形及其鏡像亦可藉由對摺的方式來看待兩者的關係，從代表鏡子的直線處對摺，鏡內外圖像便可完全疊合，透過對摺將紙張翻動的動作，鏡像則成為反射全等 (reflection congruence) 的結果。由此看來，小志會將鏡像活動的鏡軸做為線對稱活動中的褶線，並用來解決此類活動的方法，這樣的解題活動，應可解釋其線對稱活動的想法。

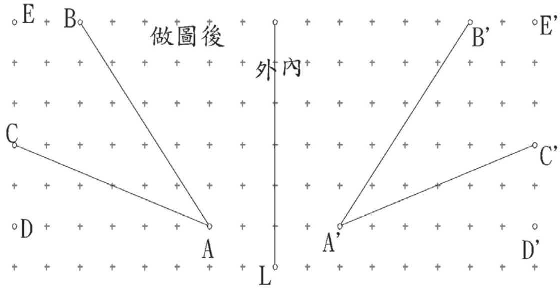
二、鏡內外對應點與鏡子的連線長等距，但對應點連線未必與鏡子垂直

所謂「鏡內外對應點」是指鏡外一點與其鏡像點，小志認為兩點與鏡子間的連線段長度應相等。該策略以三個原案分別說明，第一個原案鏡子呈鉛直放置，第二個水平放置，第三個向右傾斜45º放置，如下說明。

原案2的鏡子呈鉛直放置，給定圖形為一個角，請小志畫出鏡像角，他在點數釘點格子後分別畫出$\overline{A'C'}$與$\overline{A'B'}$。從製圖過程中可看出小志認為鏡外點與鏡像點至鏡子的距離相同。

原案2



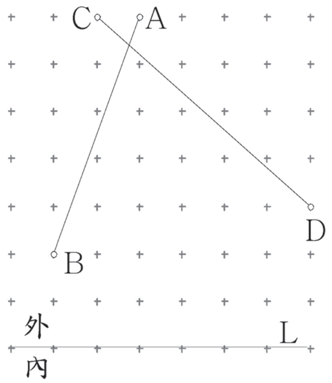


181.	生：我先畫這一條線（$\overline{A'C'}$）。
182.	師：那這一條線怎麼畫下來的？
183.	生：也是取一樣的，這裡相距兩格（A至L），這裡也相距兩格（A′至L）。

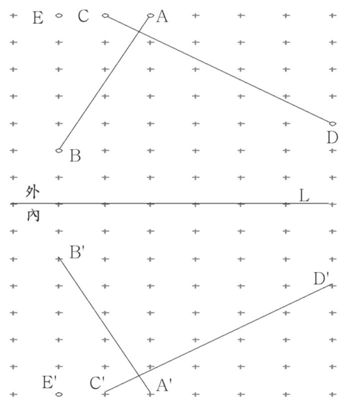
小志先計數鏡外點與鏡子的釘點間隔數為兩格，再從鏡子處向另一側數兩個釘點間隔找出鏡像點，由此推測，他認為鏡像點與鏡外點兩者與鏡子的連線段保持等長。再以原案3說明。

原案3的鏡子為水平放置，問題圖形為兩線段皆不與鏡子或釘點格線垂直或平行，請小志畫出鏡像圖形。結果發現小志認為鏡子兩側對應點分別與鏡子的連線段等長。

原案3



作圖前



作圖後

549.　生：（先畫$\overline{D'C'}$，再畫$\overline{B'A'}$）

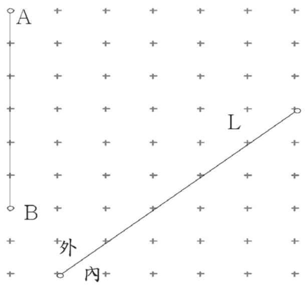
550.　師：那一樣講講看，你是怎麼畫出來的？

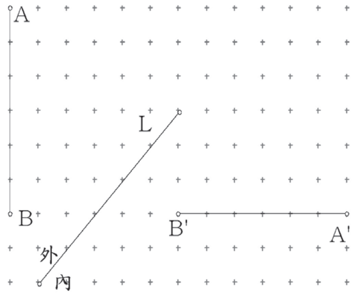
551.　生：這邊有三格啊（分別指D至L、L至D′），我先確定這個點（D′），然後這一條線（$\overline{DC}$），一、二、三、四、五、六、七（C至L的距離），有七個，這邊一、二、三、四、五、六、七（L至C′），這個點（C′），因為它這條線（$\overline{AB}$）沒有通過任何點，因為這個（A）是跟這個（C）相差一個的距離，所以在這邊（指出A′的位置），這條線（$\overline{AE}$）有兩格的距離，一、二、三、四，第五格（E至B），所以往外兩格（A′至E′），下去的第五個點（E′至B′），把它連起來（B′與A′），就是這個叉叉。

行551小志認為D距離鏡子三格，鏡子另一側三格處可找出鏡像D'，C與鏡子距離七格，鏡子另一側七格處即為鏡像C' 的位置。由此，小志利用鏡外點與鏡子的連線長度找出鏡像點的位置。同時小志表現出利用釘點所構成的隱約格線，在格線上游走找出對應的鏡像點，並在游走之間，掌握了鏡子內外對應點與鏡子連線段等長的原則。繼續再以原案4說明。

原案4問題情境為鏡子右傾45º，給定線段為鉛直線，小志畫出的鏡像線段為$\overline{A'B'}$，但不確定是否正確，研究者請他說明$\overline{A'B'}$的製圖過程。結果發現他認為鏡內外兩點到鏡軸連線段等長，但連線段與對稱軸未必是垂直。

原案4





作圖前　　作圖後

593. 師：你說這條（$\overline{A'B'}$）怎麼畫出來的？
594. 生：亂畫畫出來的。
595. 師：一定有數過。
596. 生：沒有，除了數格子以外（指A），還有這個（B），這三格啊（B至L的水平距離），三格外面（B′至L的水平距離），這（$\overline{AB}$）一、二、三、四、五、六，六格啊，這六格（$\overline{A'B'}$）。
597. 師：那為什麼這條畫橫的不畫直的呢？
598. 生：橫的比較好畫啊。
599. 師：為什麼不畫直的，直的也好畫。
600. 生：因為畫直的（想了一下）位置不夠啊！

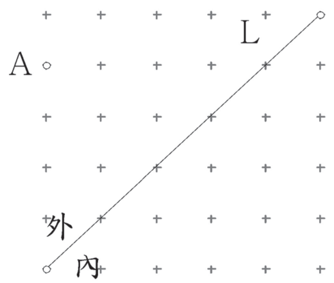
原案4問題令小志思考許久，可能是給定的線段、對稱軸及紙張三者彼此的方向關係造成作圖的困難點。一開始小志不知如何著手找點，行596只能藉著數格子找出B點之鏡像B' 。但他所謂與鏡子三格的距離是B向右三個釘點間隔至鏡子處，再從鏡子處向右三個釘點間隔至B' ，也就是沿著紙張上水平釘點方向的間隔數。由此看出，小志認為鏡子兩側的對應點與鏡子的連線段必須保持等長。

然而，等長的製圖原則卻無法在此原案中製作出正確的鏡像圖形，這表示小志並無考慮鏡內外對應點與鏡子的連線段也須和鏡子互相垂直，顯然連線段與鏡子互相垂直的條件不在小志進行的鏡射活動中。之後，研究者曾追問$\overline{B'A'}$為何不畫成鉛直線時，他以紙張不夠大做為理由，但此理由亦不肯定，小志只

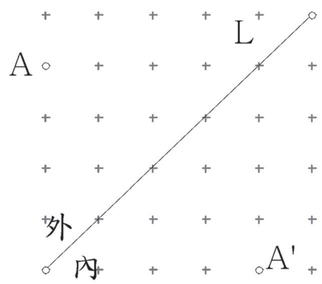
能確定 $\overline{AB}$與 $\overline{A'B'}$ 的長度必須相同，也知道鏡軸到B及B' 的連線必須等長，而未從B與B' 連線是否被鏡子平分並互相垂直角度思考，由此可見，小志的確未能發現鏡子兩側對應點的連線必須和鏡子垂直且平分。

若將原案2與原案3比較，2、3兩原案雖能成功製鏡像圖，但都恰巧因其鏡子的擺放位置為鉛直與水平型態，使得其對稱軸兩側的對應點連線正好與鏡子互相垂直。所以，從三個原案中歸納得知，小志認為在對稱軸兩側所做的直線應該等長，且兩側直線上對應點的連線需與鏡子互相平分，但不一定要垂直。因此，若視鏡子線為生成線對稱圖形的對稱軸，研究者推測小志所完成包含給定圖形的線對稱圖形只掌握對稱軸兩側對應點連線被對稱軸平分，而未有足夠證據顯示小志認為該連線與對稱軸需互相垂直。即便是問題圖形為一個圓點，對稱軸右傾45º，請小志做出其鏡像。結果發現小志在製圖時認為給定的圓點與鏡像在同一線上，但這條線亦未必會和對稱軸垂直，以原案5說明之。

原案5



作圖前



作圖後

565. 生：（畫出A′）

566. 師：為什麼你會點在那邊？

567. 生：因為它（A）跟這一條線（L）有兩格的距離，之後也是兩格，一格、兩格（L至A′），如果把它橫著看（將紙右轉45度），也是一樣在同一條線上。

568. 師：不要轉紙，確定嗎？

569. 生：嗯。

在小志找出A的鏡像點A' 過程中，他認為鏡外圖形與鏡像兩者到鏡子必須等距，並且在行567中指出「如果把它橫著看（將紙右轉45度），也是一樣在

同一條線上」，也就是將問題的鏡子位置轉為水平型式，並以鏡子兩側對應點是否在同一線上做為確認鏡像正確與否的檢驗方式。

由原案5看來，小志認為鏡外點與鏡像點似乎是在同一直線上，在他所考慮的同一線上應是指若以A為起點，沿著該連線會通過一個一個的釘點，穿越鏡子，再到達A' 點。換言之，小志是依照給定的圖形為圓點A，自A行走兩個釘點間隔至鏡子線，沿著這條直線將行走路線再延伸兩個釘點間隔生成對應的鏡像A' 。關於此解題活動，研究者初步推測雖然小志認為線對稱圖形其對稱軸兩側對應點在同一線上。然而，根據原案2、3、4的分析結果，小志對於鏡內外對應點與鏡子的連線長雖認為是等距的，但此連線長未必是與鏡子垂直。因此，小志即便是找出圓點A的鏡像點A' ，不過自始至終僅以等距的概念成功解題，因而，對於此種偶發成功例證，研究者也只能以不穩定的解題活動類型視之。

三、鏡外線段與對應鏡像等長

所謂「鏡外線段」包含給定圖形的線段，以及鏡子外任意兩點連接而成的線段，小志認為鏡子外線段長度與其鏡像線段長度是相同的。再以原案3為例說明。

小志找出D、C的鏡像D' 與C' 後，便利用C和A相距一格，鏡子內也會對應出現長度為一格的鏡像，所以C' 移動一格至A' ，鏡子外的A左移兩格至E，再下移五格至B，A' 也隨之移動相同的路徑長度至B' ，而確定出$\overline{AB}$鏡像位置，衍生出保長原則。

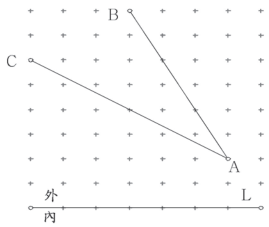
由上所述，小志利用釘點所構成的隱約格線，在格線上移動找出相對應的鏡像點，鏡子外的位移都可在鏡子內對應出一段相等的位移量，換言之，鏡像保長，鏡子兩側的對應線段長度必須一致。因此，若視鏡子線為對稱軸，研究者推測小志認為對稱軸兩側的對應線段應保有相同的長度。

四、透過釘點之間水平與垂直位移來決定對應鏡像點位置

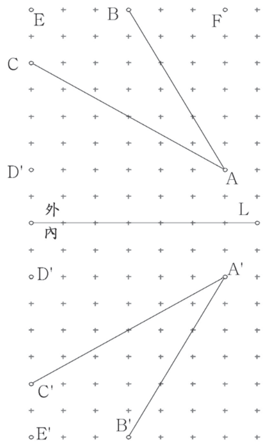
當給定圖形如果是由多條直線構成時（如原案6之圖形），頂點之間必存有相對的位置關係，在原案6中，當小志從一個頂點移動至另一個頂點則是藉由在釘點上的水平與鉛直位移作為移動的路徑，並將此路徑對應至鏡中，來決

定對應鏡像點的位置。原案6之問題，對稱軸以水平方式呈現，而給定圖形是對稱軸上方的由兩條直線所構成的圖形，兩條直線皆未與對稱軸垂直或平行，請小志做出其鏡像圖形。

原案6



作圖前



作圖後

522. 生：（先做出點數的動作，畫出$\overline{A'C'}$，再點數鏡子內與鏡子外部分，來回許多次，一直猶豫，無法下筆）等一下。

523. 師：如果數不清楚，在上面做記號都沒有關係。

524. 生：（過點數格子後，在D'與D做下記號，又點數了一會兒，在B'處做記號，最後將$\overline{A'B'}$連起來）

525. 師：那可不可以講講看是怎麼畫出來的？

526. 生：這裡有兩格（A至L），這裡照進去之後也會有兩格（L至A'），兩格這個點（A'），然後往下（A至D），一、二、三、四、五、六（$\overline{AD}$），這個（指D），然後一、二、三、四，四個之後（D至C），跟剛剛量出來（C'）是這條線，然後連起來（$\overline{A'C'}$），然後再外面數兩格（C至E），再往上面數三格（E至B），是這個點的位置（B'），再把這個點（A'）跟這個點（B'）連起來就是這一條（$\overline{A'B'}$）。

527. 師：那你確定這樣是對的？

528. 生：嗯。

529. 師：你剛剛怎麼會想這麼久？你剛有比來比去，那你是比些什麼東西？

530. 生：不知道。

531. 師：不知道，你剛在點之前有先算對不對？

532. 生：嗯。

533. 師：算哪些地方？

534. 生：算格子啊，算這個格子啊（$\overline{AD}$）、這一條（$\overline{CD}$）、這一條（$\overline{AD}$），還有這一條（$\overline{CE}$）、這一條（$\overline{EB}$），然後這一個（$\overline{AF}$）也有算。

535. 師：後來你發現這個比較好做？

536. 生：對呀。

537. 師：你連這個都有算（$\overline{AF}$）？

538. 生：因為它這個點從外面算，一、二、三、四、五、六，六格（A至F），再下去三格（F至B）。

從製圖的過程中看來，以距離對稱軸最近的A點為製圖起點，先找出其鏡像A'，其中，行524小志表示可在紙張上做記號，做出D、D'兩點，從A'向左水平移動六格，再向下鉛直移動四格，得C的鏡像C'，連成$\overline{A'C'}$；$\overline{A'B'}$則是繼續以C'為起點，向下鉛直移動兩格，再向右平移三格，得B'而成。小志將釘點連線形成的格子視為一個類似棋盤格子，行走的路徑遵循上下左右的方向，也就是鉛直或水平方向的移動，鏡子外如何挪移，鏡子內的成像也會對應著移動。因此，可看見小志從A'左平移至D'，D'下平移至C'，C'再下平移至E'，E'右平移至B'，即使行538小志表示也可換個方向確定B點時，仍採用這種上下左右的方向在釘點格子上移動，從A鉛直向上6格至F，再向左3格至B。

從上述過程中發現，小志利用鏡子兩側對應點與鏡軸連線等長的原則找出第一個對應的鏡像點，但第二個鏡像點便不再依此方式進行，而是利用點與點之間的相對位置關係。如A至C是自A左平移6個釘點間隔再上平移4個釘點間隔至C，依此移動路徑找出鏡內的對應路徑，來決定C的鏡像C'位置。然而，小志找到C'後，並未出現確認C、C'是否分別與鏡子等距的動作。由此推之，小志宛如視$\overline{AC}$為AC向量，將AC向量分解為水平分量AD與鉛直分量DC，並利用釘點間隔數作為分量的單位，將鏡子外分解的結果推論至鏡內，認為鏡內會同時產生相同方向的水平分量與相對方向的鉛直分量，並合成兩分量而確認下一個鏡像點C'的位置。據上所述，鏡像的長度藉由位移的不變性而確定，小志便利用頂點間釘點上的水平與鉛直位移決定對應鏡像點的位置。

五、預期鏡子傾斜45º，若鏡外鉛直線則鏡像為水平線

小志認為鏡子傾斜45º，鏡子外的直線在鏡子內會變為橫線，反之亦然，再以原案1為例。

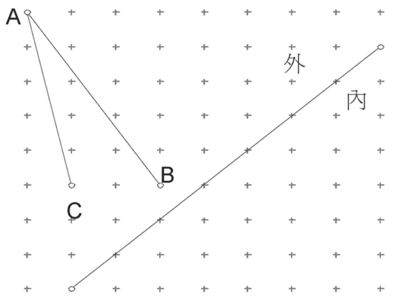
雖該原案未成功做出鏡像圖形，但在過程中，小志找出了一個重要的作圖依據，行1344說道：「直的（$\overline{AI}$）會變成橫的（$\overline{A'J}$）」，及行1348提出「因為鏡子，如果你把它摺起來，直的線會變橫的」，也就是對稱軸傾斜45º時，小志沿著代表鏡子的線對摺發現鏡子外直線在鏡子內會變為橫線，雖然他表示不明白其中的原因，但這個原則可在製圖過程中協助確定端點或線段的位置與長度。所以，之後行1353發現鏡子外D、E、J三點共線，且為一橫線，但對應至鏡子內的I、B、C三點卻不是成一條直線，顯然與此原則違背，於是小志決定重新製圖，此時該原則提供了檢驗的標準。後來的原案11為該問題重新製圖的過程，行1365亦再度運用此原則，並成功的解決問題。

就物理現象來看，鏡子成像屬於光折射現象，入射角等出射角，並在鏡內形成一個虛像，當鏡子傾斜45º，鏡外線段便與法線呈45º，射出角也為45º，同時在鏡內形成的虛像也與法線夾45º角，因而在紙面上一併呈現鏡內外線段時，兩線段形成90º角，由是小志察覺鏡子外的直線到了鏡子內就變為橫線，然而他並不理解這樣的物理現象，只是在心裡想像紙張對摺的動作而預期了對摺活動的成果，並據此作為鏡子傾斜45º的製像原則。

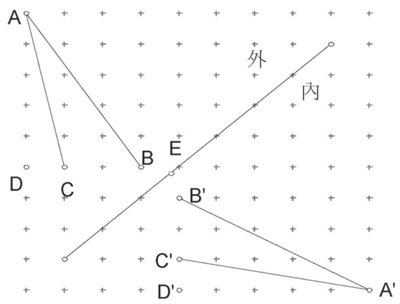
六、鏡子傾斜45º時，利用鉛直及水平輔助線來決定對應鏡像

當鏡子傾斜45º，鏡外的問題圖形為傾斜線時，將鏡外圖形補畫出鉛直及水平輔助線有助於決定對應的鏡像，以原案7為例說明。原案7為原案1的後續訪談部分，因原案1未能成功製出鏡像，小志決定重新再作圖。該問題情境為鏡子右傾45º，給定圖形為一個角，角的兩邊皆不與鏡子或釘點連線垂直或平行，請小志做出其鏡像圖形。

原案7



作圖前



作圖後

1359. 生：看我把它變成直角三角形，這樣可能會比較好畫一點。（先畫出$\overline{AD}$、$\overline{DB}$，再畫$\overline{B'D'}$、$\overline{D'A'}$，連接B' 、A' ，形成直角△A' B' D'）

1360. 師：你很厲害唷，你現在畫的是外面大的直角三角形？

1361. 生：嗯（再畫出$\overline{A'C'}$，將$\overline{A'B'}$、$\overline{A'C'}$用黑筆標示為最後答案）。

1362. 師：你看，出來了嘛，紙夠不夠用？

1363. 生：夠。

1364. 師：那你說說看，你怎麼會想到用直角三角形？

1365. 生：因為直的會變橫的，橫的會變直的，所以就利用直角三角形把它找出來，這裡（$\overline{BE}$）有一格，變過來也會有一格（$\overline{B'E'}$）。然後把這一條（$\overline{BD}$）一、二、三畫下來，一、二、三，三個畫下來（$\overline{B'D'}$）、然後這裡（$\overline{AD}$）有七格，就畫七格過去（$\overline{A'D'}$），再把這連起來（$\overline{A'B'}$）。

1366. 師：所以你的直角三角……

1367. 生：就完成了。

1368. 師：那你在找這個點的時候，你是先看這一個（$\overline{BE}$），然後這個橫的（$\overline{BE}$）會變直的（指$\overline{B'E}$），你的意思是這樣，才找到這個點（B）。

1369. 生：然後直角三角形要的已經出來了，可是這邊（$\overline{CD}$）多一格，這裡（$\overline{C'D'}$）多一格，多了一個直角三角形（△ACD）。

1370. 師：多了是指這個細的（直角三角形△ACD）。

1371. 生：這一條細的（直角三角形△ACD），然後把這裡（△A' D' C'）切掉，其餘的就是。

就給定的問題圖形來看，鏡子右傾45º擺放，角的兩邊不與鏡子垂直或平行，除端點外，構成角的線段不通過任何釘點，在此情形下，要直接計數釘點間隔數或掌握線段方向並不容易，因此，小志將自己發現「鏡外直線則鏡像變呈橫線，反之亦然」的作圖策略進行延伸，把不與釘點連線平行或垂直的歪斜線，補畫一些輔助的鉛直或水平線段，使原來的角被包含在直角三角形內。所以，小志自行連接$\overline{AD}$、$\overline{DB}$，形成直角△ADB，再造出其鏡像直角△A' D 'B' ，並畫出AC的鏡像$\overline{A'C'}$，同時也可確定了B、C、D三點共線與B' 、C' 、D' 三點共線的關係。而小志做出直角三角形正符合他慣用的方式，也就是可沿著釘點格子計數線段長度與轉換方向。接下來，小志發現大直角三角形分為兩個小三角形，給定圖形的角被包含在△ACB之內，也就是須刪除△ACD。於是，對稱軸的另一側也如法炮製，刪除△A' C' D' 便可找出鏡像角。

之前曾描述小志透過釘點間的水平與垂直位移來決定對應鏡像點位置的策略，此原案中，他並未考慮∠CAB中三個頂點與傾斜45º鏡子之間的距離關係，而仍習慣在釘點連線上做水平與鉛直方向的移動，因而做出$\overline{AD}$與$\overline{DB}$兩輔助線。這兩條輔助線與原來的$\overline{AB}$成了一直角三角形，因小志能預期「鏡外鉛直線則鏡像變為水平線」，以致利用直角三角形輔助的策略可以製圖成功。看來，問題圖形由原來傾斜的角轉換成直角三角形的型態後，顯得有較多的製圖線索，在輔助線的選擇上，小志就傾向水平與鉛直方向的線段，並且這些輔助線段都是釘點連線的一個部分。由此推論，對稱軸傾斜45º時，小志無法考慮軸線兩側對應點連線與對稱軸互相垂直，也無法直接處理歪斜線段生成的線對稱圖形，必須將問題圖形轉換成慣用的型態，也就是含有水平與鉛直的線段，才能在製作線對稱圖形時有所依據。

綜合上述分析，小志在實際紙筆情境中，製作鏡像完成線對稱圖形的解題活動中，他將代表鏡子的直線視為摺線，並認為摺線兩側的圖形會重疊，因此研究者認為小志進行的鏡像解題活動與線對稱活動是相關的，應可用來解釋其對線對稱活動的想法。整個製圖過程中，小志認為鏡子兩側的對應點與鏡子連線等長，且位在同一線上，對應線段等長，但兩對應點與鏡子的連線段未必與鏡子垂直。此外，小志較不直接考慮各個頂點與鏡子之間的關係，而是在頂點與頂點之間，透過釘點上的水平與垂直位移來決定對應鏡像點位置。當鏡子傾斜45º時，習慣利用鉛直及水平輔助線以協助確定對應的鏡像，並能預期鏡子外的鉛直線，其鏡像為水平線。大體而言，小志透過調整鏡軸成水平的視點進行作圖，並對鏡外圖形先行設定邊界，再將邊界對應至鏡內，做出鏡像圖形。

伍、結論與建議

一、結論

綜合上述小志對問題的解題表現，小志的平面線對稱概念具有下列特性：

（一）將鏡軸當成摺線，使得鏡射活動與線對稱活動產生關聯

當代表鏡軸的直線出現，可將鏡子線視為摺線，小志即認為沿鏡子線對摺，兩側圖形會完全重合，並可以對摺的方式檢驗製圖正確與否，此時釘點上的鏡射活動與線對稱活動便互有關聯，可用來解釋小志線對稱活動的想法。

（二）知道對稱軸兩側對應圖形全等

在釘點上製圖時，小志認為鏡子線為摺線，沿鏡子線對摺，兩側圖形會完全重合，並可以對摺的方式檢驗製圖正確與否，而重合的圖形即是指兩圖形全等，並能指出對稱軸兩側對應線段等長。

（三）對稱軸兩側對應點在同一線上，並且至對稱軸的連線段等長

小志認為鏡軸兩側對應點在同一直線上（此直線不一定垂直於鏡軸），但對應點與鏡軸的連線段長度相同。

（四）對稱軸兩側對應點與對稱軸的連線段不與軸線互相垂直

在製作線對稱圖形的活動中，未能有證據顯示鏡軸兩側對應點連線與對稱軸互相垂直。

（五）透過釘點間的水平與鉛直位移決定對稱軸兩側對應點的位置

小志利用給定圖形中頂點與頂點之間的位置關係，透過釘點間的水平與鉛直位移來決定對應鏡像點的位置，也因此當鏡子傾斜45º，則以鉛直與水平輔助線來決定對應的鏡像。

從上述歸納的特性來看，小志能將鏡軸當成摺線，使得鏡射活動與線對稱活動產生關聯，即表示小志線對稱的前置概念已具備了如一些學者（朱建正，1997; Leikin, Berman, & Zaslavsky, 1997; Rosen, 1995）所指的變換幾何概念 (transformational geometry)，也就是把線對稱看成平面上的鏡射。其中變換幾何所包含的空間中圖形的相對位置、全等以及對稱關係，小志也都能在活動中，透過三種主要的全等動作 (Souviney, 1994) 包括，翻轉 (flip)、移動 (slide) 和轉

動 (turn) 等加以完成，進而了解對稱軸兩側對應圖形是全等的，以及知道對稱軸兩側的對應點在同一線上，對應點至對稱軸的連線段等長。另外，在補形的活動裡，小志雖已知道鏡射活動下，鏡軸兩邊的圖形不變，也就是一側的鏡像完全是另一側的圖形，反之亦然。但從小志的解題表現並無法進一步確定他是否已具備鏡軸兩側對應點連線與對稱軸互相垂直的概念。大致而言，從研究中活動的解題表現，可以了解小志似乎已經具有線對稱的生成概念，也就是給定小志一個任意圖形，在指定對稱軸後，可以完成一個包含此給定平面圖形的最小對稱軸圖形，然而，這樣的線對稱生成概念僅在當鏡軸是水平或鉛直時表現最為明顯，若鏡軸為傾斜45º，小志則需透過鉛直與水平的輔助線來協助並決定對應的鏡像。

二、建議

（一）未來研究方面

本研究最大的收穫在於從鏡射活動出發，可與線對稱活動產生關聯，並藉此說明兒童的線對稱概念，再進一步探討製作線對稱圖形的種種活動類型，由結論中仍可看出尚待釐清的問題，以下提供未來研究之參考。

1. 本研究之受訪兒童為國小五年級兒童，未來研究可將受訪者擴展到各年級，以建立不同年級兒童線對稱概念的可能模型。
2. 對特定個案進行長期的縱貫研究，以建立線對稱概念的可能發展模型。
3. 本研究在前測晤談時發現對國小五年級兒童解決對稱軸傾斜30º、45º與60º的問題時發生許多困難，因此在正式晤談中只提出傾斜45º的問題。未來研究可選取年紀較大的受訪者，進行對稱軸傾斜角度不同的問題探究。
4. 線對稱圖形可視為幾何變換的結果，未來研究可針對不同的歐基里德幾何轉換，如平移、旋轉等進行探究。

（二）課程教學方面

本研究發現鏡軸的出現與否攸關鏡射活動能否與線對稱活動產生相關，並且在尋找對稱軸時，也因軸線必須由兒童自行尋找，使得尋找對稱軸的對摺活動未能與線對稱活動相關，因此，在課程設計時，可先給定代表對稱軸的直線段，再做後續的製作線對稱圖形活動或檢驗是否為對稱軸等活動。

而在製作線對稱圖形的活動中，五年級的小志已能掌握對稱軸兩側圖形的對應關係，包括對應點在同一線上、對應線段等長、對應點至對稱軸的連線段等長，但並未察覺對應點連線需與對稱軸互相垂直，即使在尋找對稱軸的解題活動也未能察覺，造成小志多半在心裡想像將紙張沿著代表對稱軸的鏡子線對摺，再考慮兩側的對應之處，因而衍生出當鏡子傾斜45º時，鏡外鉛直線則鏡像呈水平線，或利用水平鉛直輔助線製作對應線段等策略。

如同Hoyles與Healy (1997) 所建議的，對於線對稱的教學應該給予學生從不同的觀點加以思考的機會，並透過溝通協商以進一步了解線對稱概念的意涵。因此，在設計課程或進行教學活動時，先讓兒童透真實的線對稱活動經驗，並指出軸線兩側各個對應點，再將對應點相連接，觀察該連線與軸線互相垂直的現象，進而發現線對稱圖形的幾何意義，以及進行製作線對稱圖形的活動。另外，因國小階段尺規作圖尚未正式進入課程設計中，因此，在製圖活動中，應重視兒童原始的製圖方式，以逐漸形成其對幾何學上的意義。

致謝

本文之完成，承蒙甯自強教授、鍾靜教授的細心指導以及審查委員提供寶貴的建議與指正，僅此獻上由衷的謝意。

參考文獻

朱建正（1997）。**國小數學課程的數學理論基礎**。國科會成果報告，未出版，台北市。

洪萬生等（譯）（1979）。**簡明數學百科全書**。台北：九章。

陳冠州（2008）。真實情境下國小二年級兒童空間定位概念之個案研究。**科學教育學刊，16**（3），281-301。

教育部（1993）。**國民小學課程標準**。台北市：教育部。

教育部（2001）。**國民中小學九年一貫課程暫行綱要**。台北市：教育部。

教育部（2005）。**國民中小學九年一貫課程正式綱要**。台北市：教育部。

國民學校教師研習會（1995）。**國民小學數學科實驗課程教師手冊第十二冊**。台北縣：台灣省國民教學校教師研習會。

甯自強（1993a）。「建構式教學法」的教學觀-由根本建構主義的觀點來看。**國教學報，5**，33-41。

甯自強（1993b）。**國小低年級兒童數概念發展研究：「數概念」類型研究**（1/3）。國科會專題研究計劃報告。

甯自強（1996）。**國小低年級兒童數概念發展研究：「數概念」類型研究**（3/3）。國科會專題研究計劃報告。

劉湘川、劉好、許天維、易正明（1993）。**我國國小學童對稱概念的發展研究**。國科會專題研究計劃報告。

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (1994). *Handbook of qualitative research.* Thousand Oaks, CA: Sage.

Edwards, L. D. (2003). *The nature of mathematics as viewed from cognitive science.* Proceedings of the 3rd Conference of European Research in Mathematics Education. Bellaria, Italia.

Healy, H. (2004). The role of tool and teacher mediations in the construction of meanings for reflection. In M.van den. Heuvel – Panhuizen (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 3, pp. 33-40). Bergen, Norway.

Hoyles, C., & Healy, L. (1997). Unfolding Meanings for Reflective symmetry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 2* (1), 27-59.

Knuchel, C. (2004). Teaching Symmetry in the Elementary Curriculum. *The Montana Mathematics Enthusiast, 1*(1), 3-8.

Leikin, R., Berman, A., & Zaslavsky, O. (1997). Defining and understanding symmetry. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st international conference for the psychology of mathematics education* (Vol. 3, pp. 192-199). Lahti, Finland.

Mackrell, K. (2002). Polygons with primary students. *Micromath, 18*(3), 26-28.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Ning, T. C. (1992). *Children's meanings of fractional number words.* Unpublished doctoral dissertation. The University of Georgia, Athens, GA.

Rosen, J. (1995). *Symmetry in science: An introduction to the general theory.* New York: Springer-Verlag.

Seidel, J. (1998). Symmetry in season. *Teaching Children Mathematics, 4,* 244-246.

Smith, E. (1997). Constructing the individual knower. *Journal for Research in Mathematics Education, 28,* 106-111.

Son, J. (2006). Investigating preservice teachers' understanding and strategies on a students' errors of reflective symmetry. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka, N. Stehlikova (Eds), *Proceedings of the 30th of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 5, pp. 146-155). Prague, Czech.

Souviney, R. J. (1994). *Learning to teach mathematics.* New York: Macmillan Publisher Company.

von Glasersfeld, E. (1980). The concept of equilibration in a constructivist theory of knowledge. In F. Benseler, P. M. Hejl, & W. H. Kock (Eds.), *Autopoiesis, communication, and society.* New York: Campus.

von Glasersfeld, E. (1989). Constructivism in education. In T. Husen & N. Postlethwaite (Eds.), *The international in encyclopedia of education* (Vol. 1, pp. 162-163). New York: Pergamon.

von Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism.* London: The Falmer.

Wilson, P. S., & Adams, V. M. (1992). A dynamic way to teach angle and angle measure. *Arithmetic Teacher, 39*(5), 6-13.

A Case Study of a Fifth Grade Child's Pre-Concept of Plane Line Symmetry

Li-Ping Chen Kuan-Jou Chen*

Taoyuan Jian-Guo Elementary School

*kuanjou2005@gmail.com

Abstract

The study was aimed at exploring a fifth grader's pre-concepts of plane line symmetry. Shou-Jue (pseudo name), the participant, had been interviewed eleven times via the method of teaching interview. Properties of Shou-Jue's pre-conceptions of plane line symmetry are summarized as the followings:

1. The emergence of mirror axis enforces the relationship between line symmetry activities and mirror activities.
2. Shapes on the one side of the symmetry axis are congruent to their corresponding shapes on the other side.
3. The length between every pair of corresponding points are bisected the symmetry axis.
4. The lines joined by every pair of the corresponding points are not perpendicular to the symmetry axis.
5. On finding the location of corresponding points within the grid context, horizontal as well as vertical movement, as major strategies that had been employed.

Keywords: teaching interview, scheme theory, line symmetry concept