科學教育研究與發展季刊 Research and Development in Science Education Quarterly
2009，第五十二期，67-97 頁 2009, No.52, 67-97

電腦輔助多變數函數可微性的理解

吳思慧[1*] 余啟哲[2] 邱守榕[3]

[1]國立彰化師範大學科學教育研究所 [2]國立交通大學應用數學系
[3]國立彰化師範大學數學系
[*]wsh0314@yahoo.com.tw

(投稿日期：2009年1月5日；修正日期：2009年1月20日；接受日期：2009年2月2日)

摘 要

本文將報導我們如何以Java互動式模組幫助學生學習多變數函數的「可微性」。本研究採用教學實驗法進行質性分析，分別探視Java模組搭配以問題為主的工作單中，大一生初學和大二生複習的學習行為。本研究發現：以Java模組鋪設的探究活動有助於學生連結代數表徵和圖形表徵，在連結中建構可微性的直覺意義，進而察覺並釐清其固著的迷思概念。經此視覺化，形式上的可微概念得以親近，讓學生對學習產生自信。再者，Java模組搭配工作單的學程所提供的友善環境，能促進小組組員合作地探究、展開有意義的數學對話，解題所需的先備知識得以在實作中當下補充攫取，學生的潛能隨以開發。最後，我們識別幾個特定需額外配備的項目，使電腦可統整地融入教學，有效地在輔助過程中提高高等數學的學習成效。

關鍵字：Java、可微性、多變數微積分、視覺化、連續性

壹、前言

本研究是附著於一系列有關電腦科技如何有助於微積分學習的專題計畫發展出來的一個分支，以單變數微積分的學習為基礎發展到多變數微積分。過去幾年將CAS用於輔助微積分教學與學習已有一些研究發現（白啟光，2005；吳思慧、邱守榕，2005；邱守榕，2008）。本研究的對象為學習者，最早利用的是普遍流通的CAS軟體（Maple）作為圖形和符號操作的心智工具，引導學習者進入高科技電腦的環境中，細加考察學習者在求解微積分問題的探究過程中，如何建構新知，理解概念。研究群也曾利用EXCEL軟體探討了大一微積分的學習（鄭百恩，2007）。我們確認結合動手動腦的實作計算與視覺化表徵提供了學生另類的學習經驗，且藉此深化對微積分基礎概念的瞭解。當然必須付出一些代價。通常在新課題開始時，學生必須先花力氣熟悉相關指令以操作教材，而建置和使用工具的歷程極為費時，且具有難以想像的複雜性，甚至會產生副作用（Artigue, 2002）。即使如Maple這類的軟體套件已盡量簡化了複雜性，但使用者還是需要具備基本「程式」與「指令」以及相關使用工具的基模（utilization instrumental schemes）（Lagrange, 1999; Verillon & Rabardel, 1995）。為進一步減輕學生負擔，我們轉而改以編寫Java3D程式，規劃學習動線，精心設計使用者介面與實作環境。學生的操作僅止於調整參數及啟動／停止模組內各部子功能，不必費神於指令的正確與否，大幅減低誤導執行結果而偏失學習焦點的潛在可能性。

在國內，利用電腦輔助高等數學的研究早在上世紀八十年代初就開始進行。國科會在初期規劃數學教育合作研究計畫（第一階段）時即把電腦輔助高等數學的教學研究列為第四重點，由王九逵擔任協調人，延攬數學本科的教授進場探討電腦在大學數學課程的應用（王九逵，1986a，1986b，1989；邱守榕，1990）。新竹教大羅昭強教授，九十年代學成歸國後亦繼續探討以電腦科技融入微積分的教學（羅昭強，1993）。八十年代的美國大學成風行以電腦作實驗的方式教微積分，美國數學學會（MAA）綜合教學經驗和成果特別彙編成書（Leinbach, Hundhausen, Ostebee, Senechal, & Small, 1991）。大陸大學，如華東師範大學、重慶大學，使用電腦帶領學生進行數學實驗，從他們編寫的教材（傅鸝、龔劬、劉瓊蓀、何中市，2000；萬福永、戴浩暉，2003）可見一斑。但是這些教材發展的研究似乎未細察學生的學習過程，專書報導也沒有說明學習成效、評析學習困難。國外已有學者在電腦輔助的環境中探討學生的學

習，進行細部分析，多所發現（Hille, Lee, Laborde, & Linchevski, 1992; Artigue, 2002），但國內則仍少有。

本研究針對多變數微積分中基本卻困難的兩大課題：「連續性」與「可微性」，設計Java模組搭配工作單的環境。由於「連續性」的理解並未遭遇太大的困難，本文將報導我們所觀察到的學習「可微性」的行為，特別關注在學生如何以建構圖形表徵和代數表徵之間的連結的方式進行推理。本文除了展現在此環境中學生如何建構可微性的直覺意義，深探且釐清其所持的迷思概念外，也指出幾個特定需額外配備的項目，提高電腦輔助的學習成效。

貳、文獻探討

以下將針對多變數微積分的學習困難、視覺化與微積分的學習、電腦支持的學習環境等相關文獻以及研究方法論進行探討。

一、多變數微積分的學習困難

微積分的學習研究已有豐碩的成果，且多聚焦在單變數函數的極限、連續、導數、積分等基本課題，但少有探討多變數微積分的學習。多變數微積分中所牽涉的概念本質上和在單變數中多數是相同的，但實質上卻更為複雜且困難度更高。學生不能直接將他在單變數微積分課程所學的觀念外推到多變數，因而發生困難（Franco, et al., 2000）。此外，單變數的情境較偏重算則（algorithmic），但在多個變數的情況常無法以相同手法處理。多變數微積分相較單變數，更難以想像，需要良好的空間視覺力（vision）。

數學概念具有過程（process）和物件（object）（Dubinsky, 1991; Gray & Tall, 1994）等二元性。例如 ，既是動態逼近的過程，又是靜態的趨近結果。學生必須能視情境所需，靈活地改變認識的角度，將數學符號或概念看成既是動態的可操作步驟的過程，又是靜態的整體對象，此即Gray和Tall（1994）所稱的過程概念（Procept）理論。對於特定概念，其中會涉及到許多的元素，某些過程、物件以及相關概念。這些元素間（或和其它概念的元素）彼此的關係便在個體心中形成概念基模（concept schema）。Tall 和 Vinner（1981）便據此區分學生的概念心像（concept image）和概念定義（concept definition）以探討學

習困難。所謂的概念心像指的是個體關於該概念的整個認知結構，包括所有的心智圖像和相關的性質與過程，也就是個體看待概念的方式。概念定義則是用以指出概念的字詞或符號，學生可能由有意義的學習或反覆記憶得到。

此外，在發展概念理解的過程迷思概念似乎是不可避免的，甚至是必要的（Davis & Vinner, 1986; Tall, 1991b）。作為教學者或研究者必須加以考量，並意識到這些學習困難或迷思概念，幫助學生將其原有知識在新的情境中同化、調適，再重構。本研究將參考Tall 和 Vinner（1981）的理論，從學生的概念心像（concept image）和概念定義（concept definition）並從微分的過程和物件的觀點來探討學生的理解。

二、視覺化與微積分的學習

數學的視覺化指的利用合適的圖像（用紙筆或是電腦等產生）來表徵數學概念或問題，並用此圖像達到理解或作為解題的輔助（Zimmermann & Cunningham, 1991）。視覺化是為達理解的一種手段，而非目的。另一方面，視覺思考和圖形表徵應該與其它思考方式或表徵形式加以連結才能有助於理解。學習者應該學習如何分別以圖形、代數、數值的方式表徵某一數學想法，並且能來回周遊於其間。

利用視覺上直觀的想法幫助學生發展微積分的重要概念，如極限、連續和可微性，已被廣泛探討。有些是用特別開發的軟體：如Tall（1991a, 1991b）提出微積分的理論應該以「局部直線（local straightness）」的觀點加以重新概念化。Tall 和 West（1992）建議互動性的視覺軟體可便利探索式地學習數學，使學生獲得直覺的洞察，提供有意義的數學理論得以建立的認知基礎。Habre (2001) 利用已開發的軟體幫助學生透過視覺化學習多變數微積分，結果顯示學生視覺化的技能得以改進，且有助於概念的理解。

在1980年代興起的微積分改革運動後，許多學者進行以電腦代數系統（Computer Algebra System, CAS）輔助微積分的教/學研究（Heid, 1988; Hille, Lee, Laborde, & Linchevski, 1992; Porzio, 1995），關於學生在CAS輔助下的學習和解題能力的理解，獲致豐碩的研究成果。研究指出CAS的學習環境有以下特點：1. 可同時提供代數、圖形和數值等表徵，幫助學生使用並識別不同表徵，並在表徵間作連結；2. 可以實驗的方式學習數學，鼓勵找樣式（pattern），預測結果，操弄數學物件以及使用數學的程序等；3. 免於代數操作上的錯誤，有

利於聚焦在概念的發展上。我們也沿著此方向探討Maple幫助學生學習微積分可提供的實質幫助（吳思慧、邱守榕 2005；邱守榕，2008），卻也發現建置和使用工具的歷程極為費時且具有難以想像的複雜性，甚至產生學習的副作用（Artigue, 2002）。

有鑑於此，我們改以Java3D程式，精心規劃設計使用者介面與實作環境。Java是一種高階程式語言，能製作網頁中的互動式圖片並處理動畫（Heath, 2001）。Java3D是具備Java的跨平台特性以及在網頁瀏覽器上可呈現3D物像的程式語言。這是一個兼具3D呈現以及程式計算能力的先進技術。我們所發展的模組並非一般使用者使用任何套件可以做到的，需要具備相當的技術量身訂作。

三、電腦支持的鷹架學習環境

知識的建構基本上是根據既有的知識，從環境中產生適應協調的一個過程。根據維高斯基的社會建構論觀點，兒童透過與他人的互動開始習得複雜的心智活動（Vygotsky, 1978）。所以一個良好的學習環境的營造，才能促使學生透過與環境中的人和物互動，建構出有意義的學科知識。據此考量，電腦可當成一種促進學習的媒介，且讓學習較優者幫較差者在潛能發展區（Zone of Proximal Development, ZPD）學習與發展。電腦的環境有利於學習的特徵（Smith, 2002），包括有：（1）. 科技是互動的，容易創造一個讓學生作中學，收到回饋，持續修改自己的理解以及建立新知的環境。（2）. 科技可以幫助學生將難以理解的概念視覺化。（3）. 科技提供大量訊息的通道，包括數位圖書館、真實世界資料、與各類專家或可提供學習回饋的人連結，增進師生的學習。因此，老師不再只是知識的唯一傳輸者，而是一個好的經營管理者，學習需透過討論、設計良好的工作單、合作學習的模式等等達成。

提到ZPD，不得不提鷹架（scoffold）的概念。在數學教育中最早提出搭造鷹架 （scoffolding）的是Wood, Bruner和Ross（1976），他們探討在孩童解決三維空間積木組合的問題時，指導者所扮演的角色。雖未提及Vygotsky的相關理念，但是Wood, Bruner和Ross所探討的專家協助解題的教導過程與ZPD的理念相吻合，後人引用便將兩者放一起（引自王琇慧，2001），並將ZPD視為鷹架理論的基礎。

教學實驗研究法（Teaching Experiment Methodology, TEM）則是一種可用以識別學生的ZPD且用鷹架加以開發的研究法。TEM的操作型定義很早就由

Steffe & Cobb（1983）所提出，但在國內卻仍較少有研究使用。此法意在教學過程中探視學生的思考狀況與認知過程，即學習者所擁有且運用的知識，TEM本身即是鷹架，鼓勵細顆粒的分析（fine-grained analysis）。研究群已有人以TEM進行研究（如王琇慧，2001；曾喬志，2008；黃彬麟，2008；鄭百恩，2007），探視學生的學習情況，也因而提升自己的學科教學能力。本研究將根據鷹架與ZPD的理論，以Java模組和工作單為學習鷹架，布置一個促成小組合作的電腦輔助學習環境，並用TEM探視學生的學習狀況，且適時調整。

參、研究方法

本研究一開始針對多變數函數學習較困難的課題設計兩個Java模組，一個探索連續性，一個探索多變數函數的可微性；並以教學實驗法（Steffe & Thompson, 2000）探究學生的推理及認知狀態，採取訊息加工處理的心理學觀點，進行質性研究的詮釋分析（Stewart & Atkin, 1982；邱守榕，1992）。在依序進行此兩個模組的教學實驗中，我們發現學生在連續性的學習較平順通過，而可微性的學習現象較有趣且值得細察，在此將聚焦在可微性的報導。但可微性的理解需通過對連續性的理解，尤其是以路徑的觀點將兩個變數化約（reduce）到一個變數來看問題的手法，更是重要。因而在此仍將針對兩者的設計加以介紹。

一、研究對象

本研究的對象有兩組，一組是北部一所理工大學（匿稱J大）大一微積分實驗班的學生，共九位，研究者二（R2）為授課教師。這些學生在正規的微積分課程外另選修一門電腦實驗課，學生在Maple輔助的環境中，以教師設計的問題為主的工作單的引導下建構微積分的重要概念。本研究配合學生正規微積分課程的時程，在學生初學多變數的極限、連續性及可微性等相關課題時，進行Java模組活動的教學實驗。九位學生兩人一組（除一組為三人）分為四組（T1~4），合作學習完成解題任務。

另一組研究對象則是兩位中部某大學（匿稱C大）大二物理生（匿稱昭生和蘇生）。此二人在推甄入學後至大一的一學年，持續參與由研究群主辦且由

研究者一（R1）教導的以Maple軟體輔助微積分學習的電腦解題實驗課程。兩人已修過單變數、多變數微積分。昭生在該班微積分成績居三名內，蘇生則屬中下，但兩人平時互動良好，在電腦解題實驗課中也都積極參與、學習意願極強。兩人合作解題主要是蘇生實作完成工作單中的任務，昭生從旁協助：當蘇生有疑慮時便求教昭生，昭生也以教導者的角色自居。

兩組學生都至少體驗過一學期以Maple輔助學習的課程，對於視窗圖形的拖曳、視角的選轉等基本操弄功能都有一定的基礎。

二、研究流程

本研究依序含有以下四大項工作：

（一）設計Java模組

研究群憑藉先前的研究與教學經驗，認定幾個多變數微積分中學生容易產生學習困難的課題，如極限、連續性、可微性、極值問題等，進行概念分析。研究者們設想假設性學習軌道和學生可能的迷思概念或學習困難，對上述的重要概念設計Java模組。本研究將只針對其中有關極限和連續性（稱Java模組一），和有關可微分性（稱Java模組二）等兩個Java模組加以探討。設計好的模組經過研究群的測試以及兩位大二生的預試，提出意見後再加以修改。例如Java模組二在設計之初，主要的構想是提供學生視覺觀察可微分與不可微分曲面，讓學生瞭解到在曲面的可微性和切平面存在的等價關係，以及切平面和方向切線的關係。進一步，研究群中有人提議不妨以有奇異點的函數作為反例呈現。多方考量後我們以看似可微，而實際上卻是不可微的例子（如本文肆、一中任務三中的反例與正例（任務四）作對照。此例無法以目視判斷曲面在原點近旁是否平滑或具尖點。我們憑藉Java模組中所設計輔助的參考物 --「切平面」（或「假切平面」）作為參照對象，讓學生建構可微分性的概念心像。

（二）編制工作單

Java模組可以讓學生自由地選擇函數、觀測點、逼近的路徑等等，並操弄參數，瞭解這些不同參數效果，探索其中的數學性質或原理或概念。但沒有適當的引導學生未必會聚焦在教學者(或設計者)所預期的主要概念上。有鑑於此，當Java 模組修正過後，研究者編制得以搭配模組操作工作單。此一工作單

作為活動中的學習鷹架，扮演極為重要的角色。

（三）教學實驗

R2先在其任教實驗班中進行Java模組搭配工作單的教學實驗。研究者們初步分析教學實驗的學習行為與理解狀況和困難後，再次修正Java模組的操作介面，同時也對工作單的問題再次編修。再讓C大的兩位大二物理生同樣進行教學實驗，R1藉由參與小組的互動情境，更深入細查學生的學習行為。

（四）資料分析

本研究的是採質性的觀點且關於學習的研究。在設計Java模組的預試、兩組學生的教學實驗中，研究者們一面收集資料，一面根據概念分析項目進行資料的詮釋分析，並將此暫時性結果修正下次實作活動的依據。

三、研究工具

本研究主要有兩個研究工具，一是Java模組，一是工作單為學習鷹架，二者相互為用，以下將介紹模組的設計與工作單的編制。

（一）Java模組的設計

我們介紹Java模組的設計，包括模組的內容分析、模組的設計理念和操作介面及程序的簡介。

1．Java模組的內容分析

這裡將依照模組的內容，分為主要概念、相關知識。

（1）Java模組一

□主要概念：極限與連續性。不同於單變數函數在某點的極限與連續性，只考慮由左邊或右邊兩逼近方向，多變數函數的情況必須考慮無限多種逼近方向。多數學生可能學到如何按部就班計算函數沿某條路徑逼近的極限值，卻未能瞭解其中代數式推導的意義。

□相關知識：兩個變數函數、兩個變數函數的圖形（空間曲面）和代數表徵、定義域上的路徑（path）、路徑的參數式表示法、沿著某路徑投射在函數曲面的空間曲線及其表示法、單變數函數的極限。

（2）Java模組二

□主要概念：可微性。二維函數 $f(x, y)$ 在 p 點（座標 (a, b)）可微表

示：$f(x, y)$ 在 p是局部可線性化"locally linear" at p。從圖形的觀點來看，如果$f(x, y)$ 在 (a, b)可微表示在該點處有貼近的切平面。如果$f(x, y)$ 在(a, b)處沒有切平面，則$f(x, y)$ 在 (a, b)不可微。

單變數函數 $f(x)$ 在某點 a 的可微性被定義為導數 $f'(a)$ ，亦即差商的極限（$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$）的存在。此由切線斜率或變化率等導出的直觀概念清楚且易於理解，但在多變數的微分卻沒有這樣相對應的形式。

教科書（Stewart, 2002）中關於可微性的定義如下：

若 $f(a+\triangle x,b+\triangle y)=f(a,b)=fx(a,b)\cdot\triangle x+fy(a,b)\cdot\triangle y+fy(a,b)\,\varepsilon_1\triangle x+\varepsilon_2\triangle y$, **(1)**

$\varepsilon_1\to 0, \varepsilon_1\to 0$ 當$(\triangle x,\triangle y)\to(0,0)$，其中$\triangle x=x - 0, \triangle y- 0$.

則 f 在(a, b)可微。多數學生並不瞭解此一定義隱諱的深意，因而無法理解可微分性的實質意義。沿單位方向u=(u, v)的偏微分定義為

$$D_u f(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+hu,b+hv)-f(a,b)}{h},$$

可視為單變數微分概念的延伸，並可進行導數值求算，造成許多學生持有：「若沿任何方向都可以偏微分，就代表在該點是可微分」錯誤的概念心像（Tall & Vinner, 1981）。

□相關知識：偏導數、切平面、沿直線路徑的垂直截面（section plane）、垂直截面與函數曲面相交的空間曲線及其切線向量。

2．Java模組的設計理念

我們結合動手操作、視覺化、表徵連結，透過電腦3D繪圖、動態調整可視角的功能，呈現數學想法，輔助學生面面觀察，且可即時實驗獲得立即回饋。藉由Java模組所表徵的一些特定函數的圖形，透過路徑（paths），從幾何的觀點觀察不同方向的逼近過程，瞭解連續性的意義。並藉由比對方向切線和切平面的關係，學生得以充分地察覺到可微性是可以被檢驗的，或者獲得關於可微性的一些直觀感覺。我們所設計的Java模組呼應Tall 和West（1992）的想法：讓學生可以操弄數學概念和過程以對概念獲得較大的洞察。而軟體設計不只是給予可行的正例，也要幫助學生去觀察想法失敗的反例。因為許多的迷思概念源自於狹隘的學習經驗。

3．Java模組的操作介面與程序

（1）Java模組一（探索連續性）

使用者可在所選取的函數定義域上自行定義逼近路徑，按下播放鍵，Java模組一將展示三維空間中函數的圖形（即曲面）、使用者（在定義域內）選取的路徑及沿此路徑投射在曲面的空間曲線之動態逼近畫面（參見圖1）。學生可針對定義域上的任一點，選擇由不同路徑逼近的極限過程，以及沿著這些路徑對應在函數圖形上的曲線等，加以視覺化。

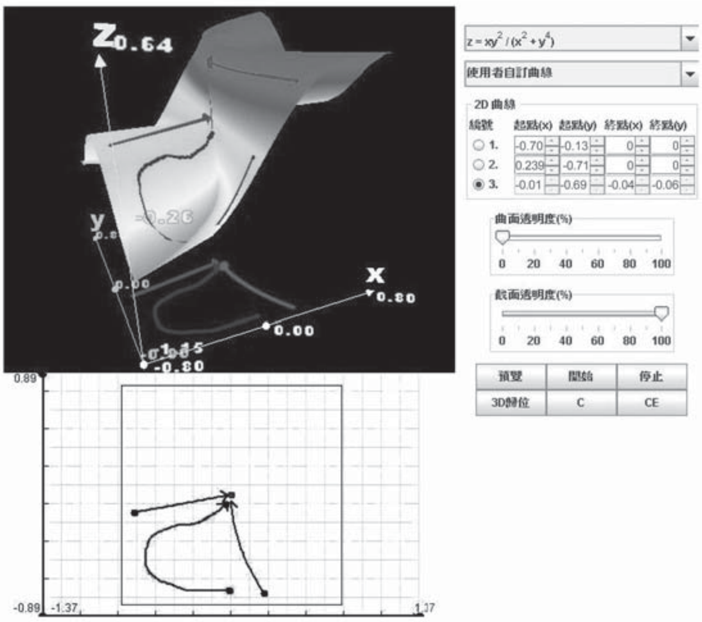


圖 1 關於極限和連續性的Java模組一

（2）Java模組二（探索可微分性）

使用者選擇所欲探索的函數及觀測點後，播放動畫，即可觀察「切平面」（藍色面）、沿各方向的直線路徑及垂直截面（黃色面）、此截平面與函數曲面截出的空間曲線（綠色線）以及該空間曲線通過觀測點的切線（紅色線）(參見圖二)。學生藉由切線和切平面（或「假切平面」）的關係探索函數的可微性；觀察不同類型的函數曲面，比較「可微分」與「不可微分」情況的特徵差異（即切面存在的可能性）。藉此模組的操作活動，學生可辨明「偏導數」與「可微分」之

間正確的關聯，理解可微性的定義，釐清錯誤的直觀。

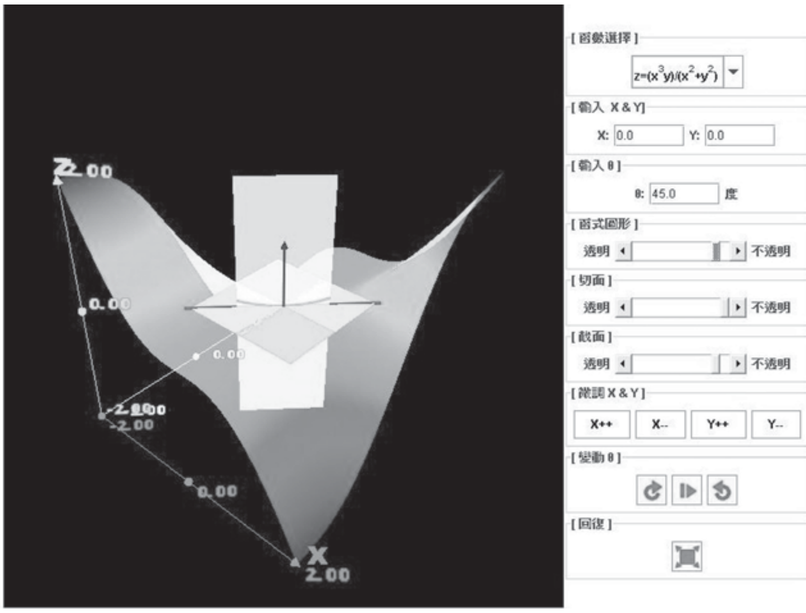


圖 2 關於可微性的Java模組二

以上模組都有一些共同的基本操作功能，如使用者可以針對某一觀測點將圖形任意拉近或拉遠（放大或縮小）、或者作視角旋轉等操作，以方便從不同的觀點探索數學性質、觀察數學現象。

（二）工作單的編制

工作單主要含有一「探索連續性」、和二「探索可微性」兩個子活動。編制的原則透過一個假設性的學習軌道（earning trajectory）（Simon, 1995），並將大問題化為學生可以攀附的小階梯（羅素，1991），搭造合適的鷹架，讓學生緣著解題的歷程建構數學概念，幫助學習者能夠較平順地獲得科技的助益。任務的編排以反例引導學生發現矛盾、產生認知衝突，透過失衡產生同化和調適，再對照正例，促成概念改變。特別的是兩個子活動都含有以

$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & (x,y)=(0,\ 0)\end{cases}$ 為探索對象，連續性的任務三中學生瞭解到

在原點為連續，但在可微性的任務四中學生則經由探索察覺到此一函數在原點無切平面，即非可微，將連續性與可微性概念貫串一起。

四、資料收集

本研究透過教學實驗收集學生解題過程中的相關資料，主要有三類資料，包括：（1）電腦實驗活動的記錄：觀察學在實驗課中的小組合作解題。我們利用影像錄製軟體記錄學生在螢幕上的操作畫面及討論情形。（2）課堂觀察紀錄，紀錄學生的問題、困難以及特異的解題方法等事項。（3）學生在活動中填寫的工作單。

五、資料分析

資料分析主要以學生在實驗活動中的作答及解題過程的原案為主要之分析對象，特別關注在他們如何在圖形表徵和代數表徵之間建立連結。分析的項目以診斷與評估學生的知識表徵、推理與思考過程、解題策略等訊息加工處理行為為主，並對一些共同或特殊現象進行分類、編碼及統計。初步分析結果和課堂觀察紀錄比對、確認，以達資料的三角校正。並透過恆常比較的方式確認資料發現的穩定性。

肆、研究發現

本章主要描述我們在教學實驗中觀察到的學習行為，特別是學生在Java模組和工作單的引導下獲得的學習助益。這些學生在關於Java模組一 -- 連續性的探索中較無學習困難，而在Java模組二 --可微性的探索中卻值得細部分析且加以探討，因此本文只針對可微性的理解加以報導。第一節描述的是大一初學者，第二節則描述大二物理生，對其操作與理解狀況加以評析。

一、大一初學者

任務三中的不可微的函數$g(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & (x,y)=(0,\ 0)\end{cases}$，

與任務四中的可微函數$h(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & (x,y)=(0,\ 0)\end{cases}$的解題過程與學習困難特別引起我們的注意，值得加以描述與分析：

（一）未深究題意即習慣性地進行符號運算，無法求出切平面

面對任務三中探索g(x, y)可微性問題的第一步的指示：「假設函數g(x, y)在(0,0)可微，請先計算gx(0,0)、gy(0,0)以及g在(0,0)的切平面」，四組學生中有三組（T1、T2、T3）一開始直接進行符號演算，得出偏導函數：

$\dfrac{dg}{dx}=\dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$，$\dfrac{dg}{dy}=\dfrac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$。

由於此二式不連續，無法利用代入法直接求得偏導數$g_x(0,0)$、$g_y(0,0)$。T4組學生雖已根據偏導數定義列出算式$g_x(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(h,0)-g(0,0)}{h}$，卻誤以為$\dfrac{0}{0}$，無法求算極限值。R2當場察覺到此現象，即引導T1～3組生退回到T4組生已依定義表述出的偏導數。T1～3組可將$g(h,0)=0$、$g(0,0)=0$、的已知條件，代入定義得到$g_x(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(h,0)-g(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0-0}{h}=0$。T4組生也察覺自己的錯誤。學生求出平面方程式$z=0$，也從圖形上確認這就是Java模組呈現的藍色平面。但學生不知此方程式不是切平面方程式，我們說它是一個“假切平面”方程式。上述T1～3組這種不考慮題意即直接進行符號演算的行為反映他們例行性的解題習慣，但碰到導函數不連續的情況，如此例，則無法進行。

（二）方向導數的計算需經參數式轉換，導致向量與純量難以辨識的困境

由於切平面，如果存在的話，是由沿x軸（可視為$r_1(t)=(t,0)$：路徑一）和y軸（可視為$r_2(t)=(0,t)$：路徑二）兩個方向的切線所決定的，切平面是否存

在則須檢驗其它方向的切線是否落在該平面上，學生先自行選擇路徑三$r_3(t) = (x(t),x(t))$，再探究該方向上的切線。T2、T4兩組選擇的皆是$r_3(t) = (t,t)$。由於在Java模組一連續性的任務裡他們已經沿不同路徑觀察過映射在函數曲面上的空間曲線的逼近情況，且將Java模組上的圖形和代數式表徵比對，在這裡他們也能夠跟隨指導語以$r_3(t) = (x(t),y(t)g(r_3(t))) = (t,t)1,\frac{t}{2})$表示相映的空間曲線且算出切線向量$r_3'(t) = (1,1,\frac{1}{2})$。但學生卻再度停頓在求該曲線通過原點的切線斜率$g(r_3(t))|_{t=0g}$的問題前，無法順著指令的引導看出所求的$g(r_3(t))|_{t=0g}=\frac{1}{2}$就是$\mathrm{r}_3(t)$的$z$軸變化率，亦即指導語不足以引導初學者理解此一微分的幾何意義即為切線斜率。T4組不清楚所求算的$g'(r_3(t))$到底是向量還是純量，兩人因而爭辯卻無結果（見圖3）。

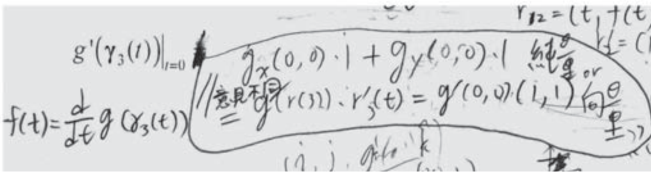


圖 3 T4組生對於$g'(r_3(t))$是向量或純量在工作單中的反應。

因而在後續的工作單中，我們修改指導語，引導學生先求出切平面的法向量和切線向量後，再檢驗切平面和切線向量是否垂直判斷切線是否落在切平面。事實上，T4在指導語的修改後，可按步驟完成任務也從圖像（見圖4）看到曲面投射在x=y平面（θ=450）的空間曲線（為一直線，參數式的z分量，z=$\frac{1}{2}$t）的定向切線斜率就是$\frac{1}{2}$，而此一切線並未落在切平面上。

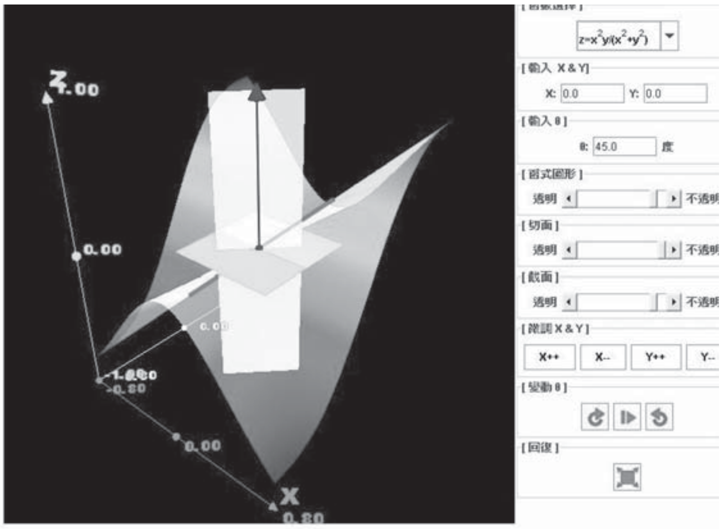
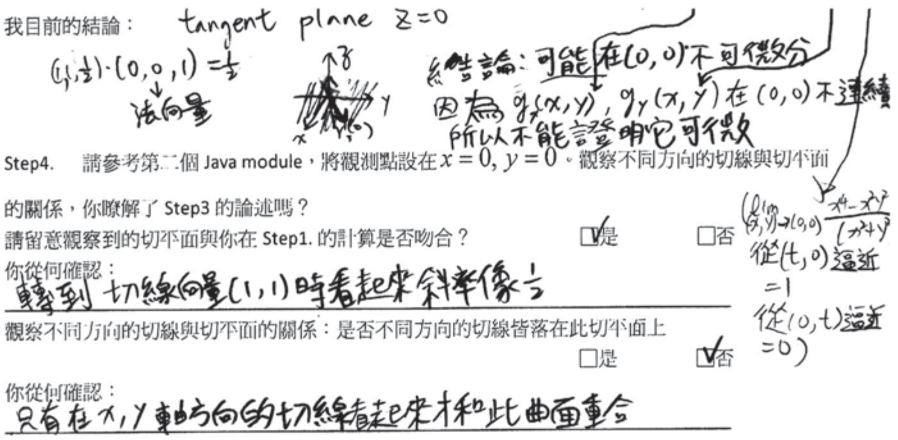


圖 4 T4組生沿路徑$r_3(t) = (t,t)$觀察的圖形。

（三）以修正後工作單的問題為鷹架，學生將代數表徵和圖形表徵作連結，並在連結中建構可微性的直觀想法

在對上述的學習困難我們修正工作單指令並給予合適鷹架後，學生能順利完成任務且理解其直觀意義。例如，T4依序求出gx(0,0)=0、gy(0,0)=0、假設的切平面方程式z=0，其法向量為(0,0,1)後，並將求算的結果和圖形比對逐一確認：從圖形上顯示沿x軸和y軸方向的切線為水平線，確認此二方向偏微分皆為0；進一步求算由此兩切線方向所張出的切平面為z=0，此即圖上的藍色平面。播放Java模組中的動畫，學生觀察到只有在x、y軸方向的切線才會和此曲面重合，其它方向的切線並不落此平面上，接著他們跟隨工作單的指導語以代數推導確認此一圖形觀察結果：T4以自行選擇的路徑r3(t) = (t,t)作為檢驗參照，並從代數計算導出該切線斜率是$\frac{1}{2}$，與圖形觀察吻合（見圖4、5）；且從藍色平面的法向量(0,0,1)和此定向切線向量$(1,1\frac{1}{2})$內積不為0，也確認此切線不落在「切平面」上。亦即此「切平面」只是假象，切平面並不存在，此函數在(0,0)並不可微。


我目前的結論： tangent plane $z=0$

$(1,\frac{1}{2})\cdot(0,0,1)=\frac{1}{2}$ 法向量

結論：可能在(0,0)不可微分 因為 $g_x(x,y)$, $g_y(x,y)$ 在(0,0)不連續 所以不能證明它可微

Step4. 請參考第二個 Java module，將觀測點設在 $x=0$, $y=0$。觀察不同方向的切線與切平面的關係，你瞭解了 Step3 的論述嗎？

請留意觀察到的切平面與你在 Step1. 的計算是否吻合？ ☑是 ☐否

你從何確認：轉到切線向量(1,1)時看起來斜率像$\frac{1}{2}$

觀察不同方向的切線與切平面的關係：是否不同方向的切線皆落在此切平面上 ☐是 ☑否

你從何確認：只有在x,y軸方向的切線看起來和此曲面重合

($\lim_{(x,y)\to(0,0)}$ … 從(t,0)逼近 =1 從(0,t)逼近 =0)

圖 5 T4在工作單對任務三的部分作答

T2組在完成任務三後，他們能仿照方法自行探索任務四中的$h(x,y)$的可微性，且綜合提出對可微性的看法：「如果空間曲線的切線不在第一步的切平面上，則此函數在此點不可微，吻合的話也不一定可以微分，應該多測試幾個不同方向的直線。」。

T1組也對可微性作出類似的總結。且根據求解的過程中觀察到的算式提出一個綜合命題：「因為$h(x,y)$分子比分母（次數）高出2次，故微分後切線向量$r'_3(t)$的z座標值〔應為z分量〕）會有一次的t。故當$t=0$時z〔分量〕值為0，亦即切線包含於定義求出之切平面，故〔在〕該點微分存在。」。這個命題可以推廣與$h(x,y)$形式類似的有理式函數上，只要「分子的次數比分母高出2次（或以上）」，都必定可微。

T4組進一步對於任務三的不可微情況嘗試作出理論猜想。他們以在Java模組一（探索連續性）中學到的方法，證明代數式$g_x(x,y)$、$g_y(x,y)$在(0,0)並不連續，得到猜想：「可能在(0,0)不可微，因為$g_x(x,y)$、$g_y(x,y)$不連續，所以不能證明它可微。」，以及結論「如果function可微，切平面會包含曲面上的切線。所以可以藉由此來檢查當函數連續，但f_x、f_y不連續的時候，是否函數不可微。」（學生在任務二中已推得知$g(x,y)$在(0,0)連續）。

以上這些學生推測的猜想或結論，其實都需要進一步後續的數學證明。但至少可以確認的是Java模組的確提供學生有關可微性探討的直觀基礎。

二、大二物理生

昭生和蘇生兩位大二物理生雖學過有關兩個變數函數的可微分性的課題，但是在Java模組的操作活動中，我們仍可窺見此一課題的迷失概念或相關知識的失聯；也看到他們在此環境的支持下，透過合作探究式的互動，展開數學對話，獲取新知或澄清迷失概念。以下將詳述兩人的學習行為特徵，並加以評析。

（一）兩人在合作中探究、互動，強者輔助弱者

昭生在活動的一開始對這個課題顯現出容易掌握的態勢。面對任務三的第一步（參見一、（一））的指示，昭生立即反應表示其慣有的求算方式，就是先引入等位面方程式再求其梯度。由於在設計時，我們把等位面方程式和梯度看作是後續發展的概念，因而要求他退回到最原始的方式求切平面方程式，即求x、y軸方向的偏導數。此時，昭生覺得這任務對他而言太容易，退而讓蘇生為主導實作，並從旁協助蘇生完成任務。在後續的探索活動中，兩人的互動雖以同儕合作學習進行，但多數是昭生扮演教導者或能力較高的學習者的角色從旁指點蘇生。而蘇生在此課題的解題活動的前期也常需徵詢過昭生的認可，方對求算的結果或做出的推論產生信心。

例如：蘇生依據工作單指示，求出g(x,y)的沿x方向的偏微分，即g(0,0)，為0時，對結果欠缺自信，質疑結果：「這是0嗎？」。待昭生驗算確認後他才感到安心。兩人接著算出 方向的偏微分，並求出切平面方程式為z=0。昭生在求算出結果後，立即與Java模組的圖形比對並得到確認：「這看也知道」。

經過幾番商量，兩人考慮選擇直線路徑r3(t)=(t,2t)，檢驗定向切線向量與「切平面」的關係。此時，蘇生因不確認結果又求救於昭生。昭生檢視並糾正他計算的失誤，且將求算結果和圖形加以印證：「看圖就知道，對啊！貼上去是直線」。

（二）學生不足的預備知識，可以在合作學習中一面作一面學

在蘇生進行解題的過程中，我們看到他的預備知識不足，確定的有：1.已知空間曲線在某點的切線向量；2.「法向量和平面垂直」的概念性知識；以及3. 由2. 推導出「法向量與平面方程式的關係」等。但在尋求協助，求教昭生後，他仍能從解題實作中重新喚起舊有經驗和原有知識，並將問題克服。蘇生

藉此機會將這些舊有知識的代數表徵和對應的圖形表徵加以連結，因而重新把握其中實質的數學意義。以下將分別指出蘇生得到昭生哪些的同儕協助，及時補上預備知識，得以繼續學習求獲新知。

1. 空間曲線的切線向量

蘇生對於任務三中的空間曲線的切線向量不熟悉。一開始蘇生以為要求的是z對t的微分值。在昭生提醒應為向量後，蘇生雖察覺自己的錯誤，但仍不知如何求算，此時昭生便教導蘇生：

（原案一）

> 昭：...應是這樣：x = t，y = 2t，z = $\frac{2}{5}t$ ，這才是空間的直線方程式，然後把它化成的對稱比例式之後不就可以算出它的切向量？
>
> 蘇：為什麼這個$\frac{2}{5}t$會等於z呢？
>
> 昭：老大！
>
> 蘇：喔我看懂了！對對對！
>
> 昭：你這邊可以化成對稱比例式啊！這是2t所以這是2，然後等於...（寫下$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{\frac{2}{5}}$）這（指分母$(1,2,\frac{2}{5})$）不是切向量嗎？

昭生以高中學過空間直線的比例式對蘇生說明：該直線的方向向量即比例式中的分母比，且亦為切線向量。但是這個方法對於非直線的空間曲線並不適用。求算切線向量的方法，對昭生而言，既可將此特例以直線方程式的比例式看待，也用一般式求空間曲線的導數求作。但對不熟悉此課題的蘇生，仍然需由昭生提示才得以完成。

2. 法向量和平面垂直的概念性知識，及法向量和平面方程式的關係

對於平面方程式的求算程序，蘇生只記得「法向量」一詞。在昭生的詢問中依稀記得：「法向量(a,b,c)，過點$(0,0,0)$的平面方程式$ax+by+cz=0$」。但由於他不記得法向量和平面垂直得以推出平面方程式，所以無法回答：「為何法向量就是平面係數？」。研究者讓蘇生先回到Java模組中，一面操作一面觀察圖形，與剛剛任務的代數式相對應。蘇生在觀察圖形時留意到Java模組二中的紅色直線，揣測說道：「紅色的線就是那個，r_3'？」。接著蘇生展開和研究者的數學對話，提出一種不同於工作單設計的策略，得以檢驗切線是否落在「切平面」。研究者除了驚喜於蘇生的表現外，也提示這裡將用另一種

方法(為昭生所點出)：由切線向量和法向量是否垂直加以檢驗。藉此，研究者喚起蘇生前述欠缺的原有知識。昭生並順勢主動對蘇生講述有關平面方程式的求算原理：「法向量和平面上任一直線的方向向量垂直關係」，讓他重新複習高中的舊知識。

（原案二）

> 昭：（在紙面上畫圖）這是一個平面，(a,b,c)是它的法向量。已知這個平面上有一個點叫做(x0, y0, z0)，我知道平面任何一點是(x,y,z)，我至少可以選一個向量(x-x0, y-y0, z-z0)，
>
> R：這就是它們兩點連起來的直線向量。
>
> 昭：這個向量（(x-x0, y-y0, z-z0)）跟這個法向量(a,b,c)作內積之後，就是0。
>
> 蘇：嗯！
>
> R：我們剛剛就是利用這個。
>
> 蘇：嗯這前面就是(a,b,c)！
>
> R：這你記得嗎？
>
> 蘇：喔這我記得啊！
>
> 昭：這個ax0+by0+cz0移過去…
>
> 蘇：就是常數項，對對對！

（三）主動連結代數表徵與圖形表徵，且提醒同儕特加注意

在解題過程中，昭生每每在求出代數表徵後會主動尋求與圖形表徵連結、相互印證。例如在任務四中，蘇生欲以路徑$(t,2t)$檢驗定向切線與切平面的關係。在求算空間曲線的過程中他得到$z=h(t,2t)=\frac{2}{5}t^2$，但對z為二次項頗感訝異，詢問昭生。昭生先確認生求算的結果正確後，對於結果感到合理，並將代數式與Java模組的圖形比對：「嗯～沒有啊，你在xy平面是直線沒錯，可是貼在曲面上，那曲面可能是（蘇：彎的。）彎彎曲曲，貼上去這就會樣子（手比圖上的曲線），所以這不意外啊！」。

與昭生對比的是，蘇生在活動的前半段多半是亦步亦趨按照工作單指示完成任務，雖被要求將所求的算式或推論和Java模組的圖形之間作關連，不過只侷限在被要求的項目本身。但在昭生適時提醒他留意到一些圖形表徵的意義時，他也能夠逐漸融入，主動比對圖形或尋求圖形的意義。亦即，此一學習環

境確實便利學生將不同表徵作連結。再者有此Java模組作為媒介，促進了同儕間的數學對話、討論、爭辯，讓數學的學習變得有意義。以下舉例說明昭生提示同儕特加注意觀察的數學物件(objects)，讓蘇生得以將模組中的各個成分與內蘊的數學概念整體作一聯繫。

在蘇生做完任務四後，昭生開始操弄Java模組二。他一面利用對Java模組中可調整曲面或截面透明程度的「透明度」選項功能，將曲面透明度調至最高，使曲面暫時消失（見圖6），一面讓蘇生注意到綠色線條：「ㄟ其實我覺得變成透明真的比較好，你可以看到它每個截到那個面，你看綠色那個有沒有看到？」。蘇生沿著昭生的指示觀察綠色線條及其變化，突然問道：「綠色的線是什麼？」。在研究者的鼓勵下，蘇生設法反思工作單所作的代數式推演，終於才想起這就是剛才所求的空間曲線。

後來，昭生提議圖形放大，可以將局部狀況看得更清楚。蘇生又自問自答地說道：「可是它為什麼是彎曲的，因為有t喔？ㄟ有t嗎？」，並一面翻閱剛才的工作單作答進一步檢視代數式。昭生認為這圖形很直觀且合情理：「t^2不就是拋物線嗎？」。蘇生也在檢視工作單後確認：「對啊！t^2yes！」。蘇生雖然已經按照任務指示完成代數求算程序，也將結果和圖形觀察到的現象比對，但是並沒有很有意識地將整個模組的各個結構成分加以掌握。不過在經過同儕提示，即能將未留心的成分加以聯繫為整體。

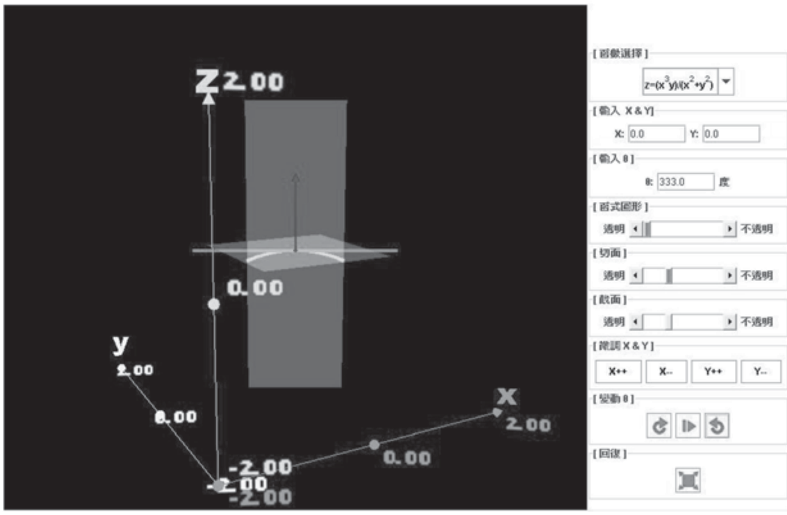


圖 6 昭生提醒蘇生特加注意的圖形

（四）數學理論與Java模組的圖像表徵互為印證，使學生經視覺建構可微性的意義，且獲得自信。

蘇生從一開始因原有知識的缺失，缺乏自信，依賴昭生，到後來愈來愈投入其中，甚至可獨立完成任務四，且從Java模組的比對得到的回饋中建構自己的數學概念，也因完成任務而產生自信。這些都歸功於此環境所提供的學習輔助和立即回饋。我們將以實例說明蘇生從學習過程中經由視覺化的輔助建構可微性的意義，且因學習的成就感而獲得自信。

當求出任務三的切平面方程式、並選擇探究(t,2t)方向的切線後，兩人回到Java模組，操弄參數、觀察產生的結果，企圖將推導出的代數表徵與模組中圖形的動態表徵作連結。研究者提示他們將觀察焦點放在紅色的切線和藍色的切平面間的關係，蘇生主動地回應且在對談中自信地表現出他已掌握活動的要項。他觀察到此例中除沿x、y軸方向，其餘各方向的切線都不落在該「切平面」上。他並指出一種非研究者預設的檢驗方式，判斷切線是否落在切平面上，雖然這個方法有其侷限性，但在此例為可行方案。對於學習能力較低落且較缺乏自信的蘇生，此表現已很難能可貴。以下為部分對話：

（原案三）

…

R：現在如果不是這兩個方向的切線，其它方向的切線就長這樣…

蘇：就歪來歪去。

R：對！歪來歪去。剛已經知道，如果它可微的條件就是，曲線的切線應該要落在這（藍色）平面上，

蘇：Ya！

R：你看到第三條切線，就是你找的，它切線向量是這樣，…，

蘇：沒有平…沒有躺（落）在上。

R：其他方向的切線都沒有躺（落）在這切平面上，其實要講的就是這件事，是不是？你如何確認它真的躺（落）在上面？

蘇：這個z=0不是嗎？

R：嗯有sense喔！不過我們可以用向量的觀點，高中學到，在平面上任一直線，如果這條線落在平面上，我們有一個很重要的性質就是什麼？

昭：等一下，請問你是不是要表達說這條線的切線向量和法向量會垂直？

R：對啊！

> 昭：對啊天啊老大！這不是理所當然？
> 蘇：所以現在就是把它dot起來

在蘇生做完任務三並得到$g(x,y)$為可微的結論後，接著他在昭生的鼓勵下，自信地繼續任務四。蘇生先按照上例的方法進行解題任務，雖然當中偶有不確認，但在求教昭生後仍將任務四順利完成（見圖7）。在完成代數求算後他主動下拉Java模組的選單，選則函數$h(x,y)$，尋求比對圖形確認結果，當看到圖形顯示各方向切線都落在切平面上時，他興奮地大叫：「Yes！Bingo！」；並在工作單上寫下判斷 可微分的推論依據：「旋轉紅線時都落在切平面上，⇒(0,0,0)可微」。

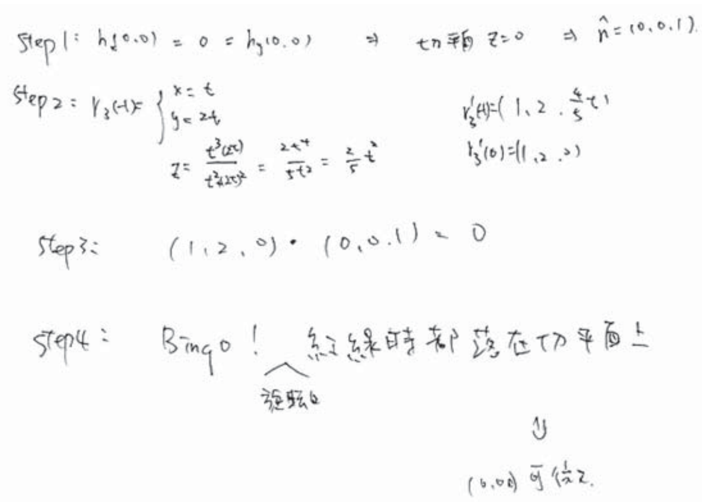


圖 7 蘇生在工作單任務四中的回答

（五）尚未發展完成的概念有待額外指導

就在蘇生剛完成任務四，且得到$h(x,y)$的結論的同時，昭生接手操弄模組。他在操作中一面觀察$h(x,y)$圖形，一面對蘇生說：「你看這每個垂直平面截出來的曲線都是連續的，都是可微的。」蘇生對這句話有點存疑，搶下滑鼠，下拉Java模組二的選單選$g(x,y)$，且問昭生：「ㄟ等一下跟剛剛那個第三題（$g(x,y)$）呢？」。昭生神色自若地一面操弄圖形讓蘇生看、一面對他說：「這也是連續可微的！」。這對剛才探索過可微與不可微函數的正反例的蘇生而言相當不

解，兩人對任務三的$g(x,y)$是否可微爭辯起來。

研究者介入兩人的爭辯，指出昭生所論說的是偏導數存在，不能代表原函數一定可微。但昭生反駁道：「單單幾個偏導數存在當然不一定可微，我是…你這樣轉（手比轉的手勢），對那一點而言， 360度轉，每個截出來的線都是連續可微的。」當研究者事後回溯才發現昭生雖從旁協助蘇生完成任務，卻因位居旁觀者角色而未能聚焦在任務的核心概念，即不可微分在Java模組中的特徵性：並非各方向的切線都落在假設的「切平面」上。研究者讓昭生重新回顧蘇生所完成之任務，特以任務三的$g(x,y)$和任務四的$h(x,y)$例子作比較，讓他感受到可微與不可微的具像差異。

此時昭生已從模組及工作單的可微與不可微的實例中，察覺到可微性的特徵條件 -- 切平面的存在。他發現自己想法「各個方向的偏導數（切線）都存在即表示可微」的問題，只是一時難以接受可不可微竟與偏導數的存在無關。更正確地應該說是偏導數的存在不能推斷可微的結論。由於昭生不服氣自己想法的失誤，不斷地找理由企圖反駁可微性定義的陳述，甚至導致他更深一層地探討概念定義的本質：「為何要這樣分函數可不可微？」、「為何要這樣定義微分性？」

研究者進一步以單變數函數為例，說明可微性的本質不僅僅只是求出算導數值，而是局部可以作線性逼近，接著將此想法類推到兩個變數函數的可微：「局部可以看成一個切平面去逼近它、替代它」。對此昭生又以「不對啊！如果各方向切線都貼在平面上，表示在那一點的各個方向的偏導數值都一樣？」質疑。在研究者提醒他：「偏導數未必一樣，切平面有可能是斜的。」後，他知此說法不妥。他又以單變數的可微性提出抗辯，覺得可微應是類似地可以作「微分」的動作。他又認為即使可微性定義為可以以切平面逼近，也只能在很小的範圍內，而以「泰勒展開式」去逼近，只要提高次數就可以讓逼近範圍更大或者逼近效果更好，「泰勒展開式」就愈來愈像原函數，因此質疑定義的必要性。但毫不考慮切平面是否存在的行為顯示昭生非常熟悉計算的程序和技能，如求導數和求泰勒展開式，但卻忽略了執行這求算過程背後的數學理論或者必要條件。當他被告知：用泰勒展開式逼近原函數的前提是「函數在展開點可微」，且「一次泰勒展開式就是切平面方程式」時，終於恍然大悟，也才真正明白且認同這個可微分定義的實質意義與重要性。

經過Java模組的學習活動產生認知衝突，昭生察覺到自己想法的缺陷，卻因不服氣導致他一系列的辯證反駁，進而更深一層探討可微分何以要以切平面來說明，乃至於可微性為何要這樣定義的本質問題。而後者雖已超出本研究模

組設計的功能和目的，但卻是值得正視的問題。

我們分析昭生對於可微性概念心像的演變，發現他仍停留在如單變數微分的動態過程，且在演算的情境中把「可微性」看作是一個「求微分」的動作：微分完後會得到一個結果：「導數值」。他並沒有把它從動態逼近過程看作是一個壓縮的物件 (Dubinsky, 1991)，即一次線性逼近（Tall (1991a, 1991b) 所稱的局部直線）。昭生以這樣的角度類推在兩個變數的函數，就自然而然地將偏微分（x、y 方向切線）的存在性定調成可微性，同樣缺乏物件的心像。事實上這個動態過程，除了固定某方向的逼近外，還要考慮方向由0到2π周轉一圈時，各個方向的逼近切線必須形成一個平面，才能推論其可微分性。換句話說這個切平面存在，才是可微分的重點。學生必須將其對微分的想法由「以偏概全」（以偏微分概推可微性），轉換到「以偏蓋全」（能以不同方向的偏微分（切線）構造/覆蓋全部切平面才是真正的可微分）。

伍、結果與討論

本研究以自行設計並製作的Java模組搭配精心編制的工作單，探究學生在此學習環境下的學習行為與認知狀況。以下將就研究發現提出結果並加以討論：

一、Java模組的探究活動有助於學生將代數表徵與圖像表徵作連結，建構可微性的意義。經由視覺化，抽象的數學概念得以親近 (tangible)，學生有踏實感，產生學習自信。

學生在此學習環境所導引的解題過程中不斷表現出主動地將代數表徵和圖形表徵加以連結。即使一開始不習慣，如蘇生，在工作單的引導和同儕的提醒下，也逐漸融入，而主動地連結不同表徵。由於可從具像且動態的圖形得到認知回饋，代數式及抽象概念的意義變得可以親近，不再遙不可及。學生因為這種學習的踏實感獲得自信。對於初學者如大一生，Java模組可以幫助他們建立可微性的直觀，作為數學理論想法的基礎 (Tall, 1991a)；對於已學過的學生，如蘇生和昭生，Java模組的活動可以讓學生重新將舊有經驗、知識與新的體驗重新加以組織；甚至利用Java模組作為認知衝突的媒介，讓學生察覺到重大的迷思概念（肆、二之（一））並可在後續的引導活動加以釐清：「以偏概全」轉

換到「以偏蓋全」。

二、Java模組搭配工作單的學習環境能促進小組組員合作探究、展開有意義的數學對話，學生的潛能得以開發。

異質性的小組，如昭生和蘇生，透過解題任務並以Java模組為媒介，發展有意義的數學對話。蘇生所不足的預備知識，在合作探究中得到同儕的教導，一面實作一面補充不足的知識且藉以學習新知。蘇生的學習現象也可以用維高斯基所提出的潛能發展區 (Zone of Proximal Development, ZPD) 的理論 (Vygotsky, 1978) 來說明：學習者在有經驗且能力較好的同儕協助或合作下，可誘發其學習成熟。作為一個新的學習伙伴，Java模組改變了學習者與學科間的關係以及學生同儕間的關係，在開發學生的潛能之時，使學生的數學知識系統化、科學化。

三、欲使電腦有效地融入教學，提高學習成效，仍待額外的配備項目：

高科技融入教學還有一段很長的路要走，我們現在只是作了輔助，在此提出幾項在本研究中識別出的配備項目：

（一）學習任務的設計仍須精細規劃

如羅素的教育論（羅素，1991）已提示我們，要把學生的困難問題細分成小問題的鷹架讓學生得以攀爬而上。在本研究中，工作單扮演學習鷹架，亦是評量工具的角色。期間任務的指導語幾經教學實驗發現不足或不適，加以修正，在此提出幾點仍有待改進之處：

1. 針對學生不加考慮習慣性地進行符號運算，先微分再求值的問題，雖經修改指導語讓學生退回定義完成子任務（肆、一之（一）），但事後反省，為了讓學生真的掌握偏微分的概念應該引導學生將視線分別投射到所考慮的自變量上。亦即，在 軸上考慮$g(x,y)$，即$g(x,0)$，其實是看 平面；在 軸上考慮$g(x,y)$，即$g(y,0)$，其實是看 平面。
2. 方向導數的計算需經參數式轉換，因方向切線斜率$g'(r_3,(t))|_{t=0}$符號不適引起向量、純量辨識困難的問題，為過渡此一困境可將$g(r_3,(t)$恢復原狀

為$g(x(t),y(t))$，即$r_3(t)=(x(t),g(x(t),y(t)))$，且將此單變數函數記為$G(t)$，即$z=G(t)=g(x(t), y(t))$，作為學習鷹架，如此一來$(g(x(t), y(t))'=G'(t)$，就很確定，即是空間曲線$r_3,(t)$的$z$分量變化率。

（二）學生仍需要額外的引導

再精心設計的學習環境，學習者仍有意想不到的表現，且仍須教師或指導者額外幫助，才能達至學習成效。以昭生為例，在雖與軟體互動中產生認知衝突，因為自己的學習特質（對自己深具自信、不隨意順從權威），導致他會去深究數學定義本身的意義。但若缺乏引導，並不足以達成此一學習效果。事實上，有了電腦科技的輔助，老師的責任或能力需求比傳統教學更甚。

反思與後記

本文的前身已在第十六屆國際電腦教育應用研討會 (International Conference on Computers in Education, ICCE) 中口頭發表過 (Wu & Yu, 2008)，當時會場中主持人肯定我們，他認為本研究的Java模組顯現的圖形表徵很迷人 (amazing)，但報告中似乎未彰顯我們如何將圖形表徵和代數表徵連結。研究者雖口頭補充說明學生如何透過工作單的紙筆解題任務將代數表徵與圖形連結，但他進一步建議我們或可另行針對代數表徵設計軟體與此圖形表徵對照且連結。對於他的寶貴意見，僅此致謝！由於他的提醒，我們在本文中特別補強說明當時沒有形之於文的，如：Java模組的內容分析 (task analysis)、模組的設計理念、模組的操作程序（以上見第三章）、以及在Java模組搭配工作單的學習環境圖形表徵和代數表徵之間的連結如何被強化（見第四章）。原先我們主要是想看圖形表徵能夠產生的效果，所以並沒有為代數表徵專門設計一套軟體，是我們能力不夠，也是新手都會有的缺失，不必自責太深。展望未來，我們考慮或可藉助電腦代數系統的代數計算功能或另在Java模組中加入代數式輸入的視窗，便利表徵間的連結。

致謝

本研究承蒙國科會專題研究計畫經費補助 (NSC96-2521-S-018-001)，以及國科會國內研究生出席國際學術會議費用補助 （編號97-2922-1-018-003）；在

論文撰寫過程中得到彰化師範大學數學系施皓耀教授的指導，特此一併致謝。

參考文獻

王九逵（1986a）。**電腦與數學。數學教育學門規劃資料**。台北市：國科會科教處。

王九逵（1986b）。電腦與數學教育。**科學發展月刊，14**（5），505-508。

王九逵（1989）。數學教育與電腦協調計畫總結報告之一：論數學實驗。**科學發展月刊，17**（4），365-369。

王琇慧（2001）。**肢體障礙國中生之數學認知—一個建構教學的行動研究**。國立彰化師範大學科學教育研究所碩士論文，未出版，彰化市。

白啟光（2005）。**使用CAS之微積分實驗教學之成效研究**。國科會專題研究計畫成果報告。

吳思慧、邱守榕（2005）。**以電腦代數系統（CAS）輔助微積分學習之研究：以單變數函數的極限為例**。第二十一屆科學教育學術研討會。彰化市：國立彰化師範大學。

邱守榕（1990）。「數學教育合作研究計劃」第二階段的重點規劃。**科學發展月刊，18**（2），137-149。

邱守榕（1992）。關於數學學習研究。**科學發展月刊，20**（5），571-584。

邱守榕（2008）。**推理活動的教學研究 – 數理科學習整合(Ⅰ~Ⅲ)**。國科會專題研究計畫總結報告。

傅鸝、龔劬、劉瓊蓀、何中市 (2000)。**數學實驗**。北京：科學出版社。

曾喬志（2008）。**從實物操作、尺規作圖到GSP進行國中幾何推理課題的教學實驗研究**。國立彰化師範大學科學教育研究所碩士論文，未出版，彰化市。

黃彬麟（2008）。**以數學活動教學實驗促進教學專業知能的成長**。國立彰化師範大學科學教育研究所碩士論文，未出版，彰化市。

萬福永、戴浩暉（2003）。**數學實驗教程**。北京：科學出版社。

鄭百恩（2007）。**Excel輔助微積分學習之教學實驗研究**。國立彰化師範大學數學研究所碩士論文，未出版，彰化市。

羅昭強（1993）。**微積分電腦數學實驗之研究**。國科會專題研究計畫成果報告。

羅素（1991）。**教育論**（靳建國譯）。台北：遠流出版社（原著出版年：1926年）。

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*(3), 245-274.

Davis, R., & Vinner, S. (1986). The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *Journal of Mathematical Behavior, 5*, 281-303.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp.95-126). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Franco, A., Franco, P., García, A., García, F., González, F.J., Hoya, S., Rodríguez, G., & de la Villa, A. (2000). Learning calculus of several variables with new technologies. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education, 7*(4), 295-309.

Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education, 26* (2), 115– 141.

Habre, S. (2001). Visualization enhanced by technology in the learning of multivariable calculus. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education, 8*(2), 115- 130.

Heath, G. D. (2001). *Java applets and mathematics.* In Ellis, A., Hall, R., & Li, J. (Eds.), Proceedings of N.A.Web 2001: The 7th International North America Web-Based Learning Conference. (Fredericton, New Brunswick, Canada, October 13-16).

Heid, M. K. (1988). Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*, 3-25.

Hillel, J., Lee, L., Laborde, C., & Linchevski, L. (1992). Basic functions through the lens of computer algebra systems. *Journal of Mathematical Behavior, 11*(2), 119-158.

Lagrange, J. B. (1999). Complex calculators in the classroom: theoretical and practical reflections on teaching pre-calculus. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 4*, 51-81.

Leinbach, C., Hundhausen, J. R., Ostebee, A. M., Senechal, L. J., & Small, D. B. (1991). *The laboratory approach to teaching calculus*. MAA Notes 20.

Porzio, D. T. (1995). *Effects of differing technological approaches on students' use of numerical, graphical and symbolic representations and their understanding of calculus*. ERIC Document Reproduction Service No.ED391665 .

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*, 114-145.

Smith, D. A. (2002). *How people learn：Mathematics*. In 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics, Hersonissos, Crete, Greece, 3.

Steffe, L. P., & Cobb, P. (1983). The constructivist research as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*(2), 83-94.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. A. Lesh & A. E Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Stewart, J. (2002). *Calculus：Early transendentals* (5th Ed.). Brooks/Cole Publishing Company.

Stewart, J. H., & Atkin, J. A. (1982). Information processing psychology：A promising paradigm for research in science teaching. *Journal of Research in Science Teaching, 19*(4), 321-332.

Tall, D. (1991a). Intuition and rigor: The role of visualization in the calculus, In Zimmermann, W., & Cunningham, S. (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp.105–119). MAA Notes No. 19.

Tall, D. (1991b). Recent developments in the use of the computer to visualize and symbolize calculus concepts. In C. Leinbach et al., (Eds.), *The laboratory approach to teaching calculus* (pp. 81-92). MAA Notes No. 20.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151– 169.

Tall, D., & West, B. (1992). Graphic insight in mathematics. In B.Cornu, & A. Ralston, (Eds.), *The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching*. UNESCO, Paris, 117– 123.

Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts. *European Journal of Psychology of Education, 10*(1), 77-101.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society* (Edited by M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner, & E. Souberman). Cambridge, MA: Harvard University Press.

Wood, D., Bruner, J., & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry and Allied Disciplines, 17*, 89-100.

Wu, S. H., & Yu, C. J. (2008). *Visually assisted learning in multivariable calculus: the cases of continuity and differentiability*. Proceedings of the 16th International Conference on Computers in Education. (Taipei, Taiwan, October27-31).

Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). What is mathematical visualization ? In W. Zimmermann, & S. Cunningham, (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp.1-8). MAA Notes No. 19.

Understanding the Differentiability of Functions of Two Variables with Computer

Szu-Hui Wu [1*] Chi-Jer Yu [2] Sou-Yung Chiu [3]

[1] Graduate Institute of Science Education, National Changhua University of Education

[2] Department of Applied Mathematics, National Chiao Tung University

[3] Department of Mathematics, National Changhua University of Education

*wsh0314@yahoo.com.tw

Abstract

The objective of this article is to report how we use the Java interactive modules to assist students learning the differentiability of multivariable functions. The teaching experiment methodology is employed and problem-based worksheets are used to gather students' understanding on the concepts. The finding shows that students can learn these advanced concepts meaningfully and confidently as they reasoned in visual way and built the connection between the graphic representation and their algebraic expressions of concepts. Students could aware and clarify their misconceptions through this learning environment. And this learning program which provides friendly environment can afford to promote group cooperation, meaningful mathematical talk, thus students' potentials can be developed. Finally, we identify some requirements for increasing the efficiency of computer integrating into teaching.

Keywords: Java, differentiability, multivariable calculus, visualization, continuity