

分數除法的教學實驗研究

李源順*、胡蕙芬**

摘 要

本研究的目的是設計一個分數除法教案，然後對國小六年級學童進行教學實驗並與現行一般教師的教學進行成效比較，最後提出教學實驗的建議。本研究採用準實驗研究法，收集資料包括教師的教案、教學錄影、教師和學生的訪談、評量試題等。信度與效度則利用上述資料進行內容效度、專家效度、以及折半信度等方式檢核。經過分數除法相關單元的文獻探討之後，本研究設計的教學素材強調分數除法的概念性知識、程序性知識與解題性知識。在概念性知識方面，運用圖形表徵配合單位量轉換的觀點來協助學生理解分數除法的概念；在程序性知識方面，利用各種題型讓學生利用課餘時間練習；在解題性知識方面，布題兼顧語意結構與情境結構，以及非例行性的問題，提供學生豐富的解題情境。在教學活動方面，本研究強調溝通討論的教學方式，讓學生在溝通的過程中從圖形表徵與單位量轉換的意涵，利用概念對比的方式與簡化問題的方式讓學童了解所學概念中的異同，同時也利用非分數除法問題檢測學生是否有假性了解的情形。研究結果發現本教學實驗優於傳統教學方式。最後，本研究反思教學成效提出分數除法相關教學素材、教學活動、教學評量與教學時機的建議。

關鍵字：分數除法、概念性知識、解題性知識

* 臺北市立師範學院數學資訊教育學系教授

** 臺北市立國語實驗小學教師

分數除法的教學實驗研究

李源順、胡蕙芬

壹、前言

國內、外有關分數除法的教學年級時有差異。在美國數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000）出版的 Principles and standards for school mathematics 明訂六到八年級的學童能了解分數四則運算的意義和效用。但加州課程標準（California Department of Education, 2000）明訂五年級學童要能理解分數乘、除法的概念，能演算分數的簡單乘、除法，並能運用它來解題。六年級學童能解釋正分數的乘、除法意義，並能演算。兩者的學習年段至少相差一年。在國內，九年一貫課程數學學習領域暫行綱要（教育部，2000）將分數除法單元中的分數除以分數的教材羅列在第三階段的七年級（國中一年級）時施教，而九年一貫數學學習領域課程綱要（教育部，2003）則將此教材置於國小六年級數學課程中，兩者學習年段也相差一年。探討其原因發現，在國內，是因為教育的觀點了影響課程的設計。九年一貫課程數學學習領域暫行綱要的研修小組的委員希望 80% 的學童能夠學會，因此將分數除法羅列於七年級進行教學；數學學習領域課程綱要（教育部，2003）的修訂小組委員則站在數學是較能進行國際性評比的觀點，希望學童在國小六年級就已經學習分數和小數的相關概念以及熟練分數和小數的四則運算。

若再深入探討分數除法的教與學，發現近年來社會建構主義理念盛行，希望學童能進行有意義的學習。也就是說，先了解其概念之後再來進行解題。因此，一些學者認為學童會解分數除法問題，但不一定了解分數除法的概念，學童可能只是熟記「除數顛倒－相乘」的規則。研究者也發現到國內、外高年級教師大都以「除數顛倒－相乘」的規則來進行教學。

所以，如何在分數除法的概念性知識、程序性知識、與解題性知識之間取得

平衡，同時在分數除法的教學中，例如教學素材，教學活動，教學評量等相關事宜，都是值得探究的課題。

貳、研究目的

在社會建構的理念下，本研究的目的是在設計一個強調分數除法的概念性知識、程序性知識與解題性知識的教案，探究這個教案的教學實驗與現行一般教師對國小六年級學童進行分數除法教學的成效比較。最後提出教學實驗的建議。相對於本研究目的，本研究要探討的問題如下：

- 本教學實驗的教學設計理念為何？
- 本教學實驗的學童在分數除法的概念性知識、程序性知識、解題性知識的學習成效如何？與對照組相較是否有顯著差異？
- 本教學實驗對分數除法相關的教學素材、教學活動、教學評量、與教學時機的建議為何？

參、文獻探討

本研究先探討有關分數除法的相關文獻，包括分數除法的概念、學童認知、教學方法等，做為設計本教學實驗的參考依據。

一、分數除法概念

有關分數除法概念的理解，由於九年一貫暫行綱要並未加以說明，故現就美國 NCTM 1998 Yearbook (Morrow & Keenney, 1998)，2002 Yearbook (Litwiler & Bright, 2002) 與我國六十四年版課程 (國立編譯館, 1996)、八十二年版課程 (陳竹村、林淑君、陳俊瑜, 2001)、九年一貫數學學習領域課程綱要 (教育部, 2003) 中的陳述分別比較之。文獻探討發現，NCTM 1998 Yearbook 和八十二年版課程偏向從學童可以理解的觀點處理分數除法問題。六十四年課程和九年一貫數學學習領域課程綱要則偏向引導學童發現分數算則的觀點處理分數除法問題。NCTM 2002 Yearbook 則呈現多元的觀點。

(一) 學童自行建構的觀點

在 NCTM 1998 Yearbook ch.22 中，Sharp (1998) 試圖討論可以讓學童自行建構除法算則的可行策略。他認為在學童建構分數除法算則之前，學童必須先具備整數除法和分數概念的知識。之後，對於分子可以整除的同分母除法的問題，例如 $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4}$ ，學童可以用重複減法的方式進行解題。同時呈現圖形圖示，如圖一。

再來，分子不能整除的同分母除法的問題，例如， $\frac{8}{12} \div \frac{5}{12}$ ，如圖二，減去 1 個 $\frac{5}{12}$ 之後，剩下的是 $\frac{3}{5}$ 個 $\frac{5}{12}$ 。異分母除法的問題，例如， $\frac{3}{4} \div \frac{1}{6}$ ，兩數的分母可以變成 12，因此透過分割（擴分）可以變成 $\frac{9}{12} \div \frac{2}{12}$ ，結果為 $4\frac{1}{2}$ ，如圖三。再來解答結果小於 1 的除法，例如 $\frac{1}{6} \div \frac{3}{6}$ ，此時減法的概念無法運用，只能從部份量（portion of requested amount）的觀點來解釋說， $\frac{1}{6}$ 是 $\frac{3}{6}$ 的 $\frac{1}{3}$ ，如圖四。經過這樣的教學之後，學童慢慢察覺它的算法的概念是先化成同分母，再把分子相除。

在 NCTM 2002 Yearbook ch.3 中，Sharp, Garofalo, & Adams (2002) 也從兒童自行建構的觀點，探究學童如何發展分數除法的算法，研究結果和 Sharp (1998) 的結果相似。

八十二年版課程的處理方式比較像美國 NCTM 1998 Yearbook 的處理方式，偏向從學童先備經驗解題的觀點進行解題。台灣省國民教師研習會（陳竹村、林淑君、陳俊瑜，2001）出版的「國小數學教材分析—分數的數概念與運算」說明如下：

1. 被除數是整數或被除數與除數同分母的包含除問題

學童可能有下列二種解題策略：甲、從總量中逐次減去分量的策略：由於包含除問題情境的特性，學童易於使用從總量（被除數）中逐次減去分量（除數）的策略解決問題，並進一步使用混合乘法與減法的算式記錄解題活動；乙、使用分量的整數倍累積逼近總量的策略。

2. 被除數與除數是異分母的包含除問題

學童可能有下列四種解題策略：甲、訴諸於內容物的策略；乙、從總量中逐次減去分量的策略；丙、使用分量的整數倍累積逼近總量的策略；丁、訴諸算則。

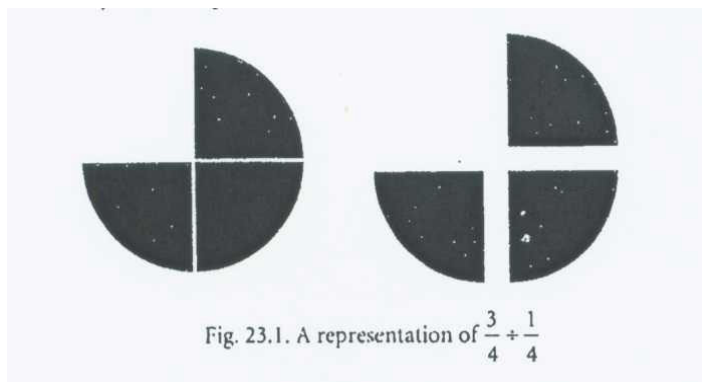
3. 分數除以整數，結果為分數的等分除問題

學童可能使用訴諸於內容物的策略解決問題，也可能透過訴諸於分割份數的

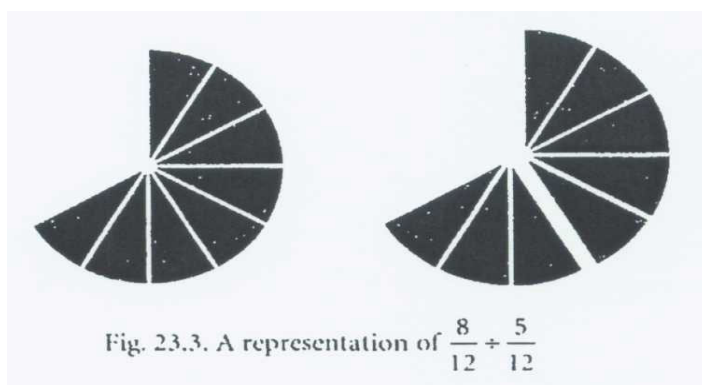
策略解決問題。部份學童也可能使用成人分數乘法算則解決問題。……教師宜注意：現階段尚未引入分數的乘法及分數除法算則，若有學童在此時使用成人算則解題，教師宜淡化處理之。

4. 當量數未知的當量除問題（分數÷分數=分數）

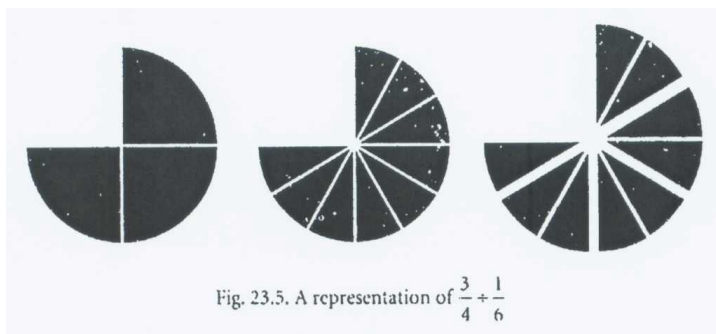
由於包含除的商數就是單位量轉換問題中的單位數，故而轉化後的問題，就是當量數未知的當量除問題。此時學童可以透過已知分量和單位量，用分數來描述分量的活動經驗，將包含除問題中的餘數，進一步用分數表示，再合併原先的商數和獲得的分數，完成商數為分數且沒有餘數的當量除問題。



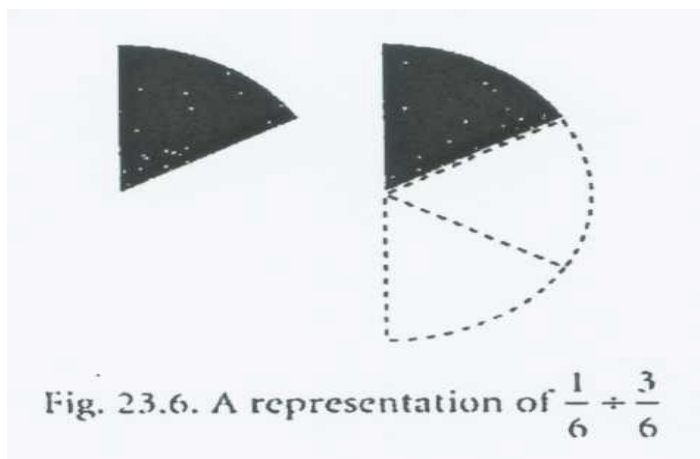
圖一 $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4}$ (引自 Sharp, 1998)



圖二 $\frac{8}{12} \div \frac{5}{12}$ (引自 Sharp, 1998)



圖三 $\frac{3}{4} \div \frac{1}{6}$ (引自 Sharp, 1998)



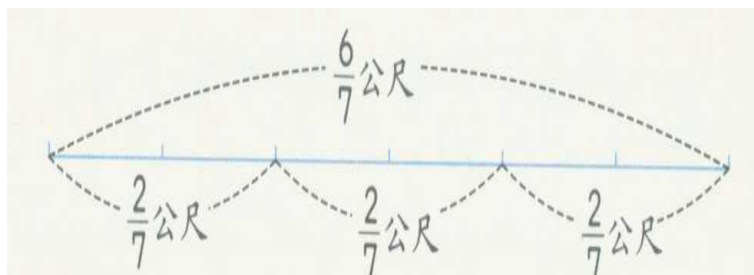
圖四 $\frac{1}{6} \div \frac{3}{6}$ (引自 Sharp, 1998)

(二) 同單位分數的觀點

六十四年版（國立編譯館，1996）教科書中，有關分數除以分數的教學，建議以「幾個同單位分數」的觀點進行教學，也就是以同分母單位分數相除的概念來教學，最後再讓學童察覺數算則。現在說明如下：

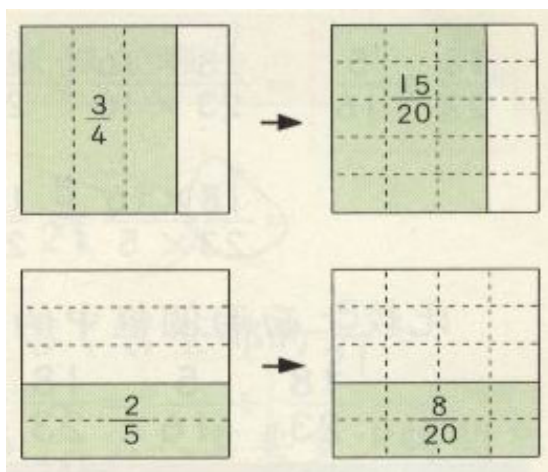
「一條緞帶長 $\frac{6}{7}$ 公尺，每 $\frac{2}{7}$ 公尺做成一朵花，可以做成多少朵花？」

用數線圖示（如圖五），加上「以 $\frac{6}{7}$ 有 6 個 $\frac{1}{7}$ ， $\frac{2}{7}$ 有 2 個 $\frac{1}{7}$ 來想，就和 $6 \div 2$ 的商一樣，所以 $\frac{6}{7} \div \frac{2}{7} = 6 \div 2 = \frac{6}{2} = 3$ 」。



圖五 六四年版分數除法線段表徵（引自國立編譯館，1996）

王家有 $\frac{3}{4}$ 公頃的田，李家有 $\frac{2}{5}$ 公頃的田，王家的田是李家的多少倍？」圖示如下圖六，利用算式「 $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{15}{20} \div \frac{8}{20} = 15 \div 8 = \frac{15}{8}$ 」，就是 $\frac{3 \times 5}{4 \times 2} = \frac{15}{8}$ 」說明解題結果。



圖六 六四年版的分數除法表徵（引自國立編譯館，1996）

最後再請學生比較另一個式子 $\frac{18}{2} \div \frac{5}{1} = \frac{18 \times 16}{23 \times 16} \div \frac{23 \times 5}{23 \times 16} = \frac{18 \times 16}{23 \times 5} = \frac{18}{2} \times \frac{16}{5}$ ，當中的框框，讓學生發現分數除以分數的商等於把除數的分子和分母顛倒和被除數相乘的積。在 NCTM 2002 Yearbook ch.3 中 Sinicrope, Mick, & Kolb (2002) 將分數除法分為三類：等分除（除以整數）、包含除（除以分數）、和乘

法逆運算，其中分數除以分數的問題中也是用類似的方式。Ch.25 Flores (2002)

也有類似的處理方式，例如 $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3 \times 5}{4 \times 2} \div \frac{2 \times 4}{5 \times 4} = \frac{3 \times 5}{2 \times 4} = \frac{3 \times 5}{4 \times 2} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2}$ 。

(三) 倒數的觀點

在九年一貫數學學習領域課程綱要（教育部，2003）的分年細目的詮釋說明中，提出分數除以分數的觀點是分數乘以除數的倒數，這是以文字表徵的形式來說明分數除法的概念：

先從「分裝」（包含除）的觀點，來處理除以分數的課題。例如：「披薩 4 個，如果每位小朋友可分得 $\frac{1}{3}$ 個，共可分給多少人？」，先理解 1 個披薩，每位小朋友可分得 $\frac{1}{3}$ 個，則 1 個披薩可分給 3 個小朋友，因此 $\div \frac{1}{3}$ ，相當於 3 倍，亦即 $\times 3$ ，因此可分給 12 位小朋友。（教師也可以在長度測量的情境中處理這個問題。）

例：「披薩 4 個，如果每位小朋友可分得 $\frac{2}{3}$ 個，共可分給多少人？」，由於除數變為原來 $\frac{1}{3}$ 的兩倍，從包含除的經驗知道， $\div \frac{2}{3}$ 的結果相當於 $\div \frac{1}{3}$ 的結果還要再 $\div 2$ ，所以 $\div \frac{2}{3}$ 的結果，相當於 $\times 3 \div 2$ ，相當於 $\times \frac{3}{2}$ 。最後將算式記為 $4 \div \frac{2}{3} = 4 \times \frac{3}{2} = 6$ 。

(四) 小結－運用圖形表徵配合單位量轉換的觀點

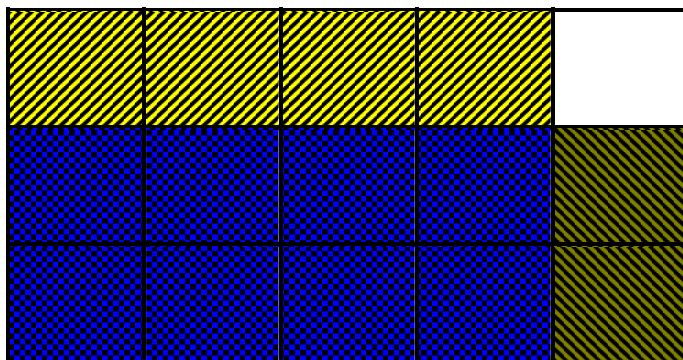
美國 NCTM (2000) 的 standards and principle、九年一貫暫行綱要（教育部，2000）、數學學習領域課程綱要（教育部，2003）等機構，以及 Lesh (1981)、甯自強 (1993) 等都重視圖形表徵對兒童建構數學概念的重要性。因此，大部份的教科書（國立編譯館，1996，2002）在進行概念的解說時，都配合圖形表徵幫助學童理解相關概念。

從 NCTM 1998 Yearbook (Sharp, 1998), NCTM 2002 Yearbook (Sharp, Garofalo, & Adams, 2002) 和八十二年版課程（陳竹村、林淑君、陳俊瑜，2001）的分數除法處理方式發現，很難從學童的經驗出發讓學童自己察覺分數除法的算式：「除數顛倒－相乘」。六十四年版使用幾個同單位分數的觀點，容易引起學童思考：「為什麼 $\frac{6}{7} \div \frac{2}{7}$ 是 6 個 $\frac{1}{7} \div 2$ 個 $\frac{1}{7}$ ，就和 $6 \div 2$ 的商一樣，不是和 $(6 \div 2)$ 個 $\frac{1}{7}$ 一樣？」

九年一貫數學學習領域課程綱要的處理方式「 $\div \frac{2}{3}$ 的結果相當於 $\div \frac{1}{3}$ 的結果還要再 $\div 2$ ，所以 $\div \frac{2}{3}$ 的結果，相當於 $\times 3 \div 2$ ，相當於 $\times \frac{3}{2}$ ，以及利用乘除互逆導出算則（Flores, 2002; Sinicrope, Mick, & Kolb, 2002）的方式，對國小學童而言偏向抽象思考的方式，因此較難讓學童理解。

因為國小學童較難進行抽象思考，因此研究者試圖尋求一種可以較直觀解釋分數除法的教學方式，至於「除數顛倒—相乘」的抽象理解待日後再進行教學。文獻分析發現，利用八十二年版的單位量轉換的觀點，結合六十四年版的二維圖形表徵，學童可能比較容易了解。例如，「王先生有 $\frac{4}{5}$ 畝的土地，李先生有 $\frac{2}{3}$ 公畝的土地，問王先生的土地是李先生的幾倍？」可以把它想成王先生的土地 $\frac{4}{5}$ 公畝原來是用 1 公畝來說明土地有多大，現在改用李先生的土地 $\frac{2}{3}$ 公畝來說明 $\frac{4}{5}$ 公畝有多大？如圖七所示所以把 $\frac{4}{5}$ 公畝的土地直切之後，再橫切成 $\frac{2}{3}$ ，此時用李先生的土地 $\frac{2}{3}$ 公畝來描述 $\frac{4}{5}$ 公畝有多大時，除數（分母） $\frac{2}{3}$ 公畝佔 5×2 塊，被除數（分子） $\frac{4}{5}$ 公畝佔 4×3 塊，所以 $\frac{4}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{4 \times 3}{5 \times 2}$ 。

雖然這種圖形表徵的處理方式無法解釋為何分數除法是「除數顛倒—相乘」，但學童可以歸納出類似除數顛倒相乘的概念。



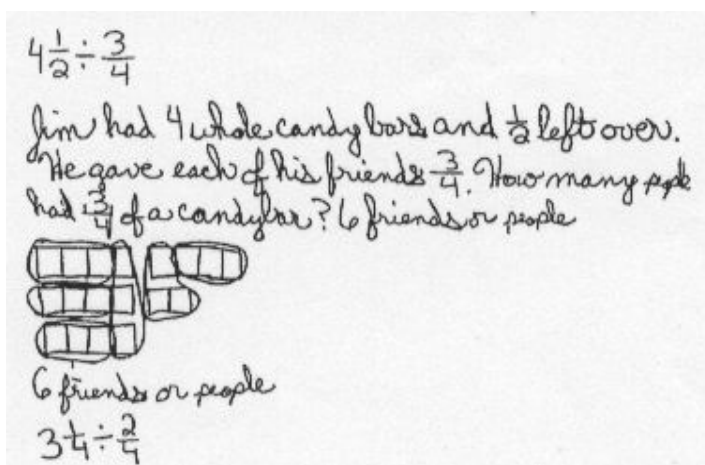
圖七 單位量轉換的分數除法表徵

二、學童對分數除法的認知

從學者 (Huinker, 1998; Sharp & Adams, 2002; 楊壬孝, 1989; 周栢達, 1999) 的研究文獻探討發現, 部份學童可以利用自己的先備知識解決分數除法問題, 但沒有證據說明學童可以自行建構「除數顛倒—相乘」的算則。同時, 國內的問卷調查發現, 學童對分數除法的程序性知識和解題性知識的表現也不理想。

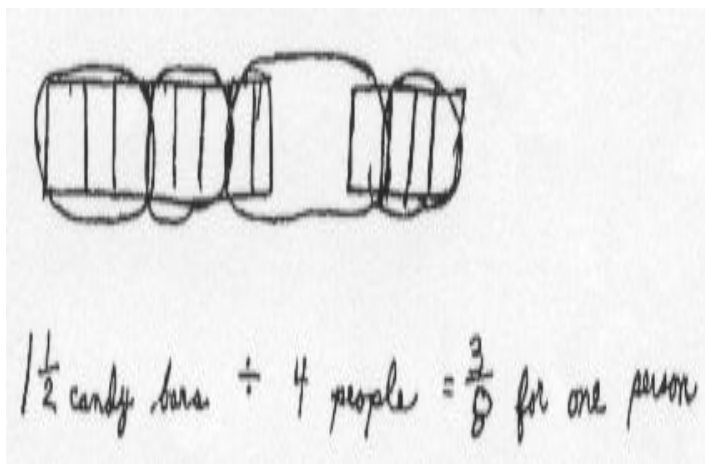
(一) 學童認知的質性研究

Huinker (1998) 觀察學童五年級學童解答分數除法的問題, 發現學童 Felisha 利用等分 (grouping procedure) 的方法解 $4\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}$ 的方法如圖八, 他先將單位長的長條等分為 4, 然後利用等分的方法, 每人得 $\frac{3}{4}$, 結果可以分給 6 人。



圖八 利用等分的解法 (引自 Huinker, 1998)

學童 Daniel 利用試驗和重分 (check and rename procedure) 的方法解 $1\frac{1}{2}$ (糖果條) $\div 4$ (人)。如圖九, Daniel 說他先試著每人分一半, 只能分給 3 人, 發現不行。再試每人分 $\frac{1}{3}$, 也不行。再試 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{5}$ ……直到試 $\frac{1}{8}$, 全部便有 $\frac{12}{8}$ (糖果條), 每人得 3 段, 所以每人得 $\frac{3}{8}$ 條。



圖九 試驗和重分的解法（引自 Huinker, 1998）

Sharp & Adams (2002) 在建構主義的理念下，對能力混合（mixed-ability）的五年級學童進行研究。首先有 92 名五年級學童進行前測，試題是等值分數，分數的加法和減法問題，以及比例思維的概念問題，研究者報導是其中 23 名學童的學習成效。在 8 天的學習當中，他們要一起討論 20 個日常生活的分數除法問題，討論式的教學方式是學童熟悉的教學方式。第 9 天便進行後測。學童利用圖形、符號、語言進行解題歷程的全班和小組溝通討論教學。研究者分析學童對分數除法概念的建構過程，研究發現學童所用的策略是運用他們已學會的分數加法、減法和整數除法概念。某些學童甚至可以發展出形式的符號歷程，其他則發展出部份的歷程，沒有人發展出「除數顛倒——相乘」的除法算則。

（二）學童認知的量化研究

楊壬孝（1988）對修讀六四年版的全國國民中小學學童做分數概念發展的施測，所做的施測結果，學童們的學習成就表現不盡理想。以六年級的學童的學習成效而言：分數四則計算題的答對率在 48%-68% 之間，分數乘法與除法的例行性文字題答對率約在 51%，而在分數四則的非例行性問題答對率更低，只有 35%。可見學童對分數的學習效果不如預期，尤其是分數除法部分更須加強。

周栢達（1999）也曾針對國小六年級學童，以八二年版實驗課程與六四年版課程，分別作為實驗班與普通班的教材施教，施測後分析兩組學童在分數概念、計算能力、錯誤類型以及解題策略是否有差異；結果發現兩組學童在計算能力上無顯著差異；但在除法文字題的答對率兩組亦不甚理想，從學童解題的錯誤類型

中發現：學童的除法概念不夠穩固，會隨著文字題語意的改變和多餘訊息的影響，做出錯誤的解題。

（三）小結

近年來，學者從事有關學童對分數四則運算認知的研究，大多數是屬於程序性知識與解題性知識的研究，很少探討分數四則運算的概念性知識並進行研究。研究者認為紙筆測驗是大量評量學童對分數四則運算概念性知識理解的很好方式，同時，語文、圖形表徵是多數學者（NCTM，2000；教育部，2003；Lesh，1981；甯自強，1993）認同為概念溝通的方式，因此研究者認為利用上述圖形表徵的溝通方式，或許是我們可以得知學童是否理解分數除法概念性知識的理想方式。所以，研究者在進行分數除法的教學實驗之後，也運用紙筆測驗的評量來探究學童利用圖形呈現其對分數除法的概念性知識的理解。

三、民主開放的課室討論文化

數學教學在近年來受到教育改革潮流的影響，重視記憶和熟練技巧的教學已無法滿足現代人的需求，取而代之的是，期望培養出具有了解自己、表達自己、獨立思考、與人溝通、尊重並欣賞別人，具有團隊合作精神，主動探索與解決問題的國民素養（教育部，2000）。教育思潮的改變，課程內容也應隨著潮流的改變和社會的需求而改變，同時，教學的方式也應該隨之改變。

鍾靜、許馨月、翁嘉聲（2001）指出，講述式教學是以教師為中心的教學，學童以聽、看的方式學習，教師的教學內容沒有關照到個別差異；因此，講述式教學已不符合現今的教育思潮。討論式教學則是根據社會建構主義的觀點而來，是以學習者為主體，由學習者自己建構知識，而非教師直接講授，也就是重視教室群體討論文化，是符合現今教育思潮的教學方式。

（一）討論式教學的內涵

討論式教學符合社會建構主義所持之教學理念。建構主義的三大原則為：(1) 知識不是被動的承受，而是藉由感覺或溝通，而使認知個體自己建造起來。(2) 認知是為了適應。(3) 認知的功能在用以組織認知主體的經驗世界，而不是發現客觀的本體世界（von Glaserfeld，1990）。因此，討論式教學是以學習者為主體，由學習者自己建構知識，而非由教師直接講授。

從 Vygotsky 於 1978 年提出近側發展區（Zone of Proximal Development，ZPD）的觀點，討論式教學就是要讓學習者可以在有能力的同伴或成人的協助下完成更

高層次的學習。因此，在教師適當的引導之下，學童可以在合作互動中進行思考，拓展知識的領域。

（二）實施討論教學的理念

以討論式的教學型態教學，最重要的是讓學童有溝通的能力。鍾靜（1996）綜合近年來數學新課程實施數學教學的文章，歸納出以下幾點：

- 創造學習數學的環境，促使學童建構數學知識。
- 啟發和引導數學意義的協商，著重了解學童個人的數學意義，給予學童最佳的指導。
- 佈置問題情境，使學童了解現象，並促使學童將已有的具體活動經驗類型抽象化成抽象運思的題目。
- 不要急著告訴學童答案，能容忍同儕間互動時的吵雜，成為多傾聽，少打斷，高尊重，低控制的參與者。

討論時要能引導思考方向，促進反思的活動、提供深層思考的數學問題、處理程序性問題，事實的淡化或強化問題。並給予足夠的時間讓學童進行思考、討論和發表，來促進學童建構有關的數學知識和概念。

此外，教師應有省思的能力，除了能確實掌握教材目標之外，適當的調整教學活動以符合學童的需求，並與其他教師進行討論，修正和提升教學理念及技巧。

（三）小結

分數除法的程序性知識比較容易進行教學，學童只要了解規則即可。至於分數除法的概念性知識以及解題性知識對學童而言是一種較難理解的知能；因此，若能輔以討論式的教學方式，相信對學童的理解有很大的幫助。所以，在本教學實驗中，以討論式的教學為核心，希望學童透過討論分數除法概念，以及如何解題的過程理解相關概念。

肆、研究方法和過程

一、研究方法

本研究採用準實驗研究法。進行有實驗組和對照組的教學實驗，有前測、後測和延測的研究過程。

二、研究樣本

基於研究之便，從研究者任教的一個六年級班級和志願參與研究的同校教師參與，一共兩班學童，人數共 69 人。研究者的班級為本研究的實驗組，全班有 35 人；另一班為對照組，人數為 34 人。

實驗組教師有高年級級任六年的教學經驗，自編分數除法單元進行教學，教學時數七節。對照組教師亦有高年級級任六年的教學經驗，平日教學認真負責，重視數學複習的課業，並經常設計試題，作為評量學童學習的參考。本單元的教學乃依某一版本數學課本進行教學，教學時數七節。從教師訪談及教室觀察發現對照組老師的教學方式以講述法為主，使用算則進行分數除法教學。

三、研究過程與資料分析

研究者先對相關文獻進行探究後，開始設計實驗組的教學教案以及兩組的測驗試卷。在前測施測完畢之後，兩組分別進行教學。兩組的教學節數都是七節，教學節數是由兩位老師共同商訂，且是在現今課程中，一般教科書所編排的節數。兩組都教學完畢之後，便進行後測，再經過五週之後進行延後測。後測與延後測之間，兩班並沒有再進行分數除法相關的教學與評量。實驗組在進行教學實驗時，每節課都進行錄影，以利需要時進行分析之用。

本研究設計兩份不同的試卷，第一份試卷主要包含分數加、減、乘，以及整數除法的問題，做為前測之用，主要在了解學童學習分數除法之前的先備相關知能是否齊一。第二份試卷主要包含分數除法相關問題，做為後測與延後測之用，主要在了解學童的學習成效與學習保留成效。為了避免學童察覺本單元主要是學習分數除法，所以在不了解題意的情況之下直接用除法解題；因此，本試卷也包含了分數加、減、乘的問題。由於試卷的設計參酌了現今文獻中的研究重點，例如，分數除法問題中包含了包含除、等分除的問題，包含了概念性知識、程序性知識、解題性知識的問題，同時試卷是由數學教育專家與實務教師共同設計，因此試卷具有內容效度與專家效度。

本研究的兩份試卷施測之後，經過信度分析，發現 Cronbach α 值在 0.7933 ~ 0.9152 之間，測驗所得分數有其穩定性。

四、教學實驗設計理念與流程

本研究對文獻進行探討後所設計的教學實驗的理念如下：

(一) 重視概念性、程序性、解題性知識

1. 概念性知識

在分數除法的概念性知識方面，研究者試圖找尋學童容易了解的圖像表徵。使用不同的表徵形式來表現一個數學物件，是數學能力的一環，反應能由不同的觀點來掌握此數學概念。面積切割和線段圖示都是圖像表徵，用來表現文字描述的問題，使問題數量間的關係具體化（陳竹村、林淑君、陳俊瑜，2001）。本單元教學活動以單位轉換量的觀點，配合面積切割或數線的圖像來表徵分數除法的概念性知識，讓學童察覺分數除法的算則，再進一步解決分數乘除的應用問題。

為了使學童的概念能完整建構，研究者在教案設計時特別注意到分數除法的語意結構和情境結構。在語意結構方面，區分為等分除和包含除，其中等分除是學童學習分數除法商為整數的恰當情境（Sinicrope, Mick, & Kolb, 2002），例如，「把 1 張紙的 $\frac{4}{5}$ 平分給 4 人，每人可得一張紙的幾分之幾？」至於包含除的恰當出現時機在分數除以整數及分數除以分數的問題（Sinicrope, Mick, & Kolb, 2002），例如，「王先生有一塊 $\frac{9}{10}$ 公畝的土地，他想把每 $\frac{2}{3}$ 公畝作成 1 個小花圃，共可劃分成幾個小花圃？」

為了使學童更容易了解分數的等分除和包含除的意涵，研究者在布題上採用對比的方式，例如，「媽媽買了 $5\frac{1}{2}$ 公斤的巧克力，想平分給兄弟 2 人，每人可得多少公斤？」以及「媽媽買了 $5\frac{1}{2}$ 公斤的巧克力，想以 2 公斤分裝成 1 盒，可以分成幾盒？」此時學童可以從不同問題的圖形表徵間的關係探究了解分數除法的完整意義。

在情境結構方面，研究者布題時注意到離散量和連續量，以及一維和二維題型的問題，同時盡可能與學童生活經驗連結，使數學概念和生活經驗相連結。

2. 程序性知識

九年一貫能力指標也相當強調演算能力的培養，認為屬於程序性知識的演算能力對學童數學解題能力有很大的幫助；因此，在教學中除了概念性知識的學習之外，研究者也設計一些計算問題和例行性問題要求學童利用課餘時間練習，以豐富學童分數除法的程序性知識。

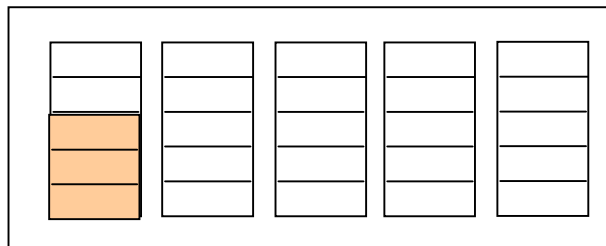
3.解題性知識

無論是九年一貫能力指標或是 NCTM 的 standards 都強調學童解題能力的培養。學童或許比較容易理解一個整數型的問題何時需要用那一種運算，但是對分數的四則運算，就不是那麼容易理解的。例如 $\frac{3}{4}$ 公尺長的鐵重 $\frac{4}{5}$ 公斤，那麼 1 公斤的鐵長幾公尺？或者 1 公尺長的鐵重幾公斤？因此，研究者儘可能的設計解題性知識的問題，培養學童的解題能力。同時，在教學時研究者運用簡化問題的方式引導學童進一步理解如何解題。

同時為了培養學童能真正了解題意進行解題，避免學童察覺本單元是分數的除法問題，便把每一題都用除法進行解題的假性認知，研究者在教學及施測過程中也都放入其他（加、減、乘）運算的問題。

（二）培養溝通能力－民主開放的課室討論文化

討論是一種合作學習，在師生與學童同儕互動中，可以促進學童的思考、藉由討論的過程中激發學童不同的解題、透過質疑辨正的過程中釐清迷思概念，對學童的概念學習有極大助益。因此研究者在數學教學過程中，引導學童共同討論或做分組討論、發表，鼓勵學童表達其對概念性知識、解題性知識的理解。從學童的表達過程中，研究者可以得知學童的單位量轉換的單位量圖形表徵不一定和教師的表徵相同。例如，「5 公升的果汁可裝成 1 桶， $\frac{3}{5}$ 公升的果汁可裝成多少桶？」的包含除問題，教師的圖形表徵是畫出五個獨立的一公升於一個長方形（一桶）的表徵（如圖十）；可是學童自己呈現的表徵，則是一個長方形（一桶）內等分成五份，每份為一公升的表徵（如圖十一）。此時，學童最後解題的圖形表徵和對比的等分除問題圖形表徵相倣。



圖十 教師 1 桶（5 公升）的表徵

圖十一 學童 1 桶 (5 公升) 的表徵

(三) 教學流程

一開始，研究者先復習學童的舊經驗，從整數除以整數結果為整數、分數佈題，提問學童。再進行（真、假、帶）分數除以整數的等分除活動，並連結圖形表徵。之後利用真分數除以整數的等分除與包含除問題進行的對比教學；讓學童了解包含除的列式以及兩者之間的表徵異同，同時了解包含除中的單位量轉換問題。

在第四節課進行分數除以整數的包含除問題教學之後，研究者直接進行真分數除以單位分數的教學，一方面希望學童能從分數除以整數的包含除問題，連結至分數除以分數的包含除列式問題，另一方面也能順利連結至單位量轉換和圖形表徵的觀點。之後再進行整數、帶分數除以分數的問題教學。

研究者利用最後兩節課進行分數除法問題的解題活動。由於這些問題的理解對學童而言，比較困難，因此，研究者利用簡化問題的方式讓學生理解為何是除法問題，同時，在教學過程之中，研究者利用非分數除法問題來檢驗學童是否有假性了解的現象。

伍、研究結果與討論

前測試題主要在檢驗實驗組與對照組學童的程度是否一致，若不一致時，後測與延後測成績需做適當調整。後測與延後則在檢驗實驗組與對照組學童的學習成效。

一、前測

假如學童沒有學過分數除法概念，那麼他很難利用其他先備知識快速解答分數除法的相關問題；因此，研究者在前測試題的設計上，只檢驗學童有關分數加、減、乘和比較型的問題。前測試題共計 15 題：計算題有 7 題（加法 2 題、減法 1 題、乘法 4 題）；比較大小有 2 題（一題數字較小，一題數字較大）；作圖題有 2 題，各有 2 個小題（作圖與列式分別計分）；文字題有 4 題（分數加法 1 題，分數乘法 2 題，整數除法，1 題）。

表一 實驗組與對照組前測試題的 T 檢定

試 題	組 別	平均答對率	T 檢 定
總 體	對 照 組	65%	-.388
	實 驗 組	66%	
計 算	對 照 組	75%	0.31
	實 驗 組	75%	
比 較	對 照 組	84%	-1.342
	實 驗 組	92%	
作 圖	對 照 組	54%	-.365
	實 驗 組	56%	
應 用	對 照 組	52%	-1.268
	實 驗 組	59%	

* $p < .05$, ** $p < .01$

由表一實驗組和對照組的前測試題分析得知，兩組總體平均答對率十分接近，對照組為 65%，實驗組為 66%；同時兩組在計算、比較大小、作圖題、應用題四大類型上的答對率也相近，t-test 的結果亦無顯著差異，可以說明實驗組和對照組學童在教學實驗前的分數概念（分數除法除外）的能力沒有顯著性差異。

二、後測與延後測

後測和延後測的試題相同（包括計算題 10 題，應用題 8 題，作圖題 2 題），因此一併討論分析。由表二可知後測的對照組總體平均答對率為 54%，實驗組為

64%，兩組的 t-test 結果為.074，雖未達顯著差異，但平均達對率有 10% 的差異。而在延後測中，對照組總體平均答對率為 52%，實驗組為 70%，兩組的顯著性雙尾達.007，已達到顯著差異。

就後測和延後測兩次學習成效言，對照組的延後測總體平均答對率雖略為降低，由後測的 54% 變為 52%，但差異很小；而實驗組的延後測總體平均答對率，則從後測的 64% 提高到 70%。但兩組各自的後測和延後測兩次測驗分析結果均沒有顯著差異，但實驗組似乎對學習保留的成效較佳。因為本研究並沒有針對此一現象進行了解，其原因有待探究。

表二 實驗組與對照組後測、延後測試題的 T 檢定

	組 別	答 對 率		T 檢 定	
		後 測	延 後 測	後 測	延 後 測
總 分	對 照 組	54%	52%	-1.814	-2.790*
	實 驗 組	64%	70%		

* $p < .05$, ** $p < .01$

下面就試題的三大類型——計算題、應用題和作圖題逐一分析說明。

(一) 作圖題—概念性知識

在無法一一訪談學童來了解學童分數除法概念的學習成效下，測驗中的作圖題希望學童以圖形呈現對分數除法概念的了解，要求學童以圖像表徵方式解題，並能列式算出正確答案；作圖題有 2 題，各要求以線段或面積圖形表徵，作圖和列式計算分別計分。

1. 概念性知識的學習成效

由表三發現實驗組在後測、延後測中均較對照組表現優異；在後測中，對照組作圖題整體答對率為 25%，實驗組為 80%；在延後測中，對照組答對率為 24%，實驗組為 78%；兩次的測驗中實驗組的答對率均高出對照組 50% 左右，且達到顯著性差異；這說明教學實驗的圖像表徵對於分數除法的概念性知識的溝通有較好的學習成效。

再就兩組的後測和延後測作比較，發現對照組的兩次答對率接近，後測是 25%，延後測為 24%；實驗組的後測答對率 80% 和延後測的答對率 78% 亦相當接近；這表示兩組的學習保留呈穩定狀況。

表三 實驗組與對照組應用題的 T 檢定

類 題	組 別	答 對 率		T 檢 定	
		後 測	延 後 測	後 測	延 後 測
作 圖 題	對 照 組	25%	24%	-7.209**	-6.897**
	實 驗 組	80%	78%		

*p<.05, **p<.01

2. 個別試題的學習成效與錯誤類型分析

作圖題中有兩題，從表四可知【作圖 1-圖】與【作圖 2-圖】在後測和延後測中，實驗組的答對率高出對照組許多，且後測與延後測均達顯著性差異，可知實驗組學習成效良好。

另外在延後測【作圖 2】的列式部分，對照組答對率為 44%，實驗組為 79%，亦達顯著性差異。從試題解題中發現：實驗組的學童較能運用圖像表徵解題，顯示對題目意義能夠了解，所以亦能使用除法列式解題，所以答對率較高。

研究者比較【作圖 1-圖】與【作圖 2-圖】的答對率，可以知道兩組學童不論是在後測或延後測中，【作圖 1-圖】的線段表徵上答對率高於【作圖 2-圖】的面積切割表徵許多，這是由於線段表徵問題較為簡單且結果恰為整數所致。

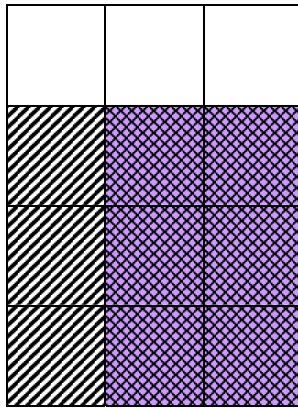
表四 作圖題顯著差異分析

試 題	組 別	類 型	答 對 率		T 檢 定	
			後 測	延 後 測	後 測	延 後 測
【作圖 1-圖】一條鍛帶 有 $3\frac{1}{2}$ 公尺長，每 $\frac{1}{2}$ 公尺 分成 1 小段，可以分 成幾小段？請用數線作 圖。	對照組	作 圖	44%	38%	-4.376**	-4.130**
	實驗組		89%	82%		
	對照組	列 式	74%	75%	-1.254	-1.393
	實驗組		86%	88%		
【作圖 2】 $\frac{3}{4}$ 張紙 $\frac{2}{3}$ 張 紙的幾倍？請用面積分 割方式作圖。	對照組	作 圖	6%	9%	-7.417**	-6.820**
	實驗組		71%	74%		
	對照組	列 式	56%	44%	-1.341	-3.160*
	對照組		71%	79%		

*p<.05, **p<.01

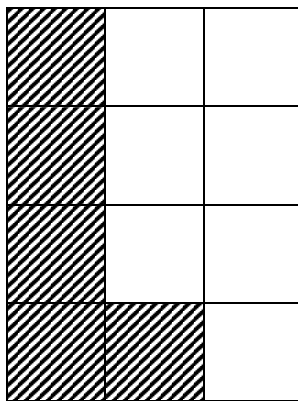
學童在作圖題的錯誤類型說明如下：

【類型一】以乘法表徵：以【作圖 2-圖】為例，有的學童能畫出 $\frac{3}{4}$ 張紙，但卻無法畫出 $\frac{2}{3}$ 張紙的意義；再就 $\frac{3}{4}$ 以直的切割出它的 $\frac{2}{3}$ ，因此無法表徵轉換後的單位量 $\frac{2}{3}$ 張紙。形成 $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{12}$ 的意義，顯示部份學童對於分數除法的概念表徵容易與分數乘法的表徵產生混淆，如圖十二所示。



圖十二 分數除法以乘法表徵

【類型二】以加法表徵：此種概念錯誤出現在【作圖 2-圖】，面積分割成 12 等分之後，直接將被除數的分子的 3 和除數的 2 相加，形成 $\frac{5}{12}$ ，如圖十三所示。



圖十三 分數除法表徵成分子相加

【類型三】作圖不完備：係指學童能夠平分，但未標記區塊。以【作圖 2 圖】為例，大部分學童能畫出 $\frac{3}{4}$ 張、 $\frac{2}{3}$ 張紙的圖像表徵，卻不知如何用斜線將 $\frac{3}{4} \div \frac{2}{3}$ 加以表徵。

3.小結

在前測中，兩組作圖題答對率低且無顯著差異，有六、七成的學童能正確利用圖形表徵分數概念，但只有二、三成的學童能正確表徵分數乘法概念，顯示兩組學童的先備經驗中少有類似作圖題型。

經過教學實驗發現有將近八成的學童能利用圖形表徵表達分數除法的概念，已達到暫行綱要中的學習目標。由於對照組沒有強調圖形表徵的教學，因此答對率偏低，只有兩成五。

研究者認為在紙筆評量過程中，利用圖形表徵來表達學童對概念的理解是一種可行的方式。因為，學童在紙筆評量過程中用文字描述其對數學概念的理解，有時非常困難且耗時，許多學者都同意學童應利用圖形表徵來溝通其對數學概念的理解。再者，我們在學習數學知識時，有時會有彼此討論時的基底（大家有共識的基礎假設條件），例如，「一盒梨子有 7 個，紅籃子裡的梨子可裝成 $4 + \frac{5}{7}$ 盒，黃籃子裡的梨子可裝成 $1 + \frac{4}{7}$ 盒，兩個籃子裡的梨子合起來可以裝成多少盒？」（國立編譯館，1996，第八冊 23 頁）」大家必須要先有共識，先假設每個梨子一樣大，否則無法進行解題。在本教學實驗的教學過程中，教師不斷的以單位量轉換的觀點進行解說分數除法概念，學童也以此方法發表他對分數除法的了解，學童和老師彼此之間已達成一定的共識。因此，研究者在紙筆評量過程中，當學童能夠畫出一圖形，用不同的斜線表示不同的分數時，並且能夠列式解答，此時我們就認同學童已能運用單位量轉換的觀點理解分數除法的概念性知識。

（二）計算題－程序性知識

1.程序性知識的學習成效比較

屬於程序性知識的計算題試題共 10 題，包括分數加法、分數減法、分數乘法各 1 題，和分數除法 7 題。由表五可以知道，對照組的計算題平均答對率為 69%，實驗組為 72%，實驗組高於對照組，未達顯著性差異。在延後測中，對照組的平均答對率為 66%，實驗組為 77%，實驗組高出對照組 11%，亦未達到顯著性差異，顯示兩組計算能力相當。這表示在本教學實驗過程中，學生有關分數除法的計算能力並未減低。

就後測、延後測兩次測驗作比較，發現對照組延後測平均答對率為 66%，略低於後測的 69%；而實驗組延後測平均答對率 77%，高於後測的 72%，可見實驗組的學習保留效果稍佳。

2. 個別試題的學習成效與錯誤類型分析

比較兩組學童各題答對率的差異，可以看出：除了【計算 10】在延後測中有顯著差異外，其餘各題在後測和延後測中兩組答對率差異不大，都在 10% 以內，均無顯著差異。

由表六得知達到顯著性差異的題目為延後測【計算 10】： $\frac{5}{12} \div 4\frac{4}{7}$ ，對照組答對率為 47%，實驗組為 82%。比較兩組各自的兩次測驗結果，發現對照組的答對率從後測的 62% 降至延後測的 47%。從學童延後測的試卷分析發現對照組學生的程序性錯誤（計算錯誤）的學童比例提高，所以答對率大幅降低。而實驗組則從後測的 69% 提高至延後測的 82%，從學童作答中可以看出，延後測中學童未做題的人數減少，可以說明後測之後的一段時間，學童的計算更為熟練，所以答對率提高，而達到顯著差異。

分析發現學童對於分數除法問題有兩種主要的概念錯誤類型：

<類型一> 未將除數顛倒而相乘：這是計算題概念錯誤人數較多的類型，以【計算 8】 $15 \div \frac{4}{5}$ 和【計算 10】 $\frac{5}{12} \div 4\frac{4}{7}$ 的人數較多。從學童的解題過程中可以發現：當分數除法中的被除數的分母和除數的分子，或被除數的分子和除數的分母數字相等或呈倍數關係時，會混淆學童的概念，造成學童先約分再顛倒相乘，也就是未先將除數顛倒再約分，由此可知此類型的計算題易造成學童概念性錯誤。

<類型二> 把被除數顛倒相乘，以【計算 8】為例： $15 \div \frac{4}{5} = \frac{1}{15} \times \frac{4}{5}$ ，學童受到被除數是整數的影響，要將整數的 15 化為分數 $\frac{15}{1}$ 後顛倒相乘，形成 $15 \div \frac{4}{5} = \frac{1}{15} \times \frac{4}{5}$ 的錯誤型態。

另外，亦有程序性錯誤的情況，如因數字大而出現乘錯、或除錯，或在解題過程因未約分而使相乘的數字變大，導致計算錯誤；顯示學童不熟練約分的技巧。

表五 實驗組與對照組計算題的 T 檢定

類 題	組 別	答 對 率		T 檢 定	
		後 測	延 後 測	後 測	延 後 測
計 算 題	對 照 組	69%	66%	-.504	-1.522
	實 驗 組	72%	77%		

*p<.05, **p<.01

表六 計算題第 10 題顯著性差異分析

試 題	組 別	答 對 率		T 檢 定	
		後 測	延 後 測	後 測	延 後 測
$\frac{5}{12} \div 4 \frac{4}{7}$	對 照 組	62%	47%	-.586	-3.207
	實 驗 組	69%	82%		

*p<.05, **p<.01

3.小結

從試題分析發現，兩組在分數除法計算題中，題目數字較小的真分數除以真分數的答對率可以達到 80%，符合九年一貫暫行綱要中 80%的學習成效；但在有帶分數、整數出現（被除數為整數時），或數字較大的計算題，其答對率在六成到八成之間。顯示學童在分數除法的程序性知識上已達教育部要把數學教材的難度程提升到前五、六成學童學習為主（民生報，2003）的目標，但部份問題未達暫行綱要中希望有 80%的學童能學習的目標。

傳統上認為在分數除法的教學中，以除數顛倒相乘的算則指導是一種簡便、效率又高的方法，但研究者的教學實驗證明：在計算能力上，以文字題布題，輔以圖像表徵教學的學習，以及課後練習計算題的成效並不比直接指導算則的教學法低，甚至實驗組的答對率仍比對照組為高。

本研究從學童作答的過程中發現：學童在計算中易受數字大小和位置的影響，當被除數的分母和除數的分子，或被除數的分子和除數的分母數字相等或呈倍數關係時，學童較容易做錯；另外，在數字大而不能約分的題目中錯誤率也較高。所以教師在布題時應考慮各種計算的題型，使學童熟悉計算的方法。

(三) 應用題－解題性知識

大部份屬於解題性知識的應用題共有八題，在問題情境（離散量、連續量）上、數字大小、解題方式（加、減、乘、除）上做安排，使得題目多元且難易度有所不同。試題包括分數減法、乘法各二題，分數除法四題。由於分數除法不是學童常見的例行性問題或容易解答的問題，所以歸納為解題性知識。

1. 解題性知識的學習成效

由表七來看，後測中對照組平均答對率為 40%，實驗組為 47%，兩組未達顯著性差異。在延後測中，對照組平均答對率為 40%，實驗組為 54%，達顯著性差異。

再就後測和延後測兩次測驗來看，對照組兩次測驗相近，答對率為 40%；而實驗組的答對率則由後測的 47% 提高至延後測的 54%，雖未達顯著性差異，但可看出實驗組學童的進步。

表七 實驗組與對照組應用題的 T 檢定

類 題	組 別	答 對 率		T 檢 定	
		後 測	延 後 測	後 測	延 後 測
應 用 題	對 照 組	40%	40%	-1.121	-2.158*
	實 驗 組	47%	54%		

* $p < .05$, ** $p < .01$

2. 個別試題的學習成效與錯誤類型分析

不管是後測或延後測，兩組答對率除了分數減法和多餘資訊的減法問題答對率有八成之外，其他各題兩組的答對率偏低。對照組在 6%-32% 之間；實驗組在 23%-56% 之間，顯示分數乘除教材（分數乘以分數、分數除以分數）對國小高年級學童的學習較為困難。

實驗組和對照組答對率題達到顯著差異的有三題，如表八。未能達到顯著差異的題目，除分數減法的應用問題外，其他各題答對率實驗組亦高於對照組，顯示實驗教學的設計理念，包括應用題布題兼顧語意、情境結構，以對比方式呈現，輔以圖形表徵的教學，適時採用討論教學，皆具成效。以下就達到顯著性差異的題目分析：

表八 應用題顯著性差異分析

試 題	組 別	答 對 率		T 檢 定	
		後 測	延 後 測	後 測	延 後 測
【應用 3】商人買進 $5\frac{11}{16}$ 公斤的魚鬆，每 $\frac{7}{10}$ 公斤裝成一罐，盡量裝完，可以裝成多少罐？還剩下多少公斤？	對 照 組	6%	16%	-3.033*	-2.098*
	實 驗 組	23%	38%		
【應用 4】12 塊核桃裝一盒， $\frac{2}{3}$ 盒裝一盤，要拿出多少塊才會正好拿了 $\frac{1}{6}$ 盒？	對 照 組	24%	28%	-1.224*	-2.085*
	實 驗 組	37%	53%		
【應用 5】 $\frac{5}{12}$ 瓶的果汁可以裝成一杯，勝忠喝了 $\frac{3}{8}$ 瓶果汁，請問勝忠喝的果汁可以裝成多少杯？	對 照 組	29%	28%	-.179	-2.340*
	實 驗 組	31%	56%		

*p<.05, **p<.01

【應用 3】為帶分數除以真分數，有餘數問題。此問題對照組後測答對率為 6%，延後測為 16%；實驗組後測為 23%，延後測為 38%。兩組答對率均明顯偏低，但實驗組達到顯著性差異。在本題情境中「分」的概念十分清晰，學童大都能以除法列式解題，但卻呈現概念性錯誤，分析學童錯誤的型態有下列的類型：

<類型一>以商為分數做為答案，忽略餘數：

$$5\frac{11}{16} \div \frac{7}{10} = \frac{91}{16} \times \frac{10}{7} = \frac{65}{8} = 8\frac{1}{8} \quad A : 8\frac{1}{8} \text{ 罐}$$

研究者對學童忽略餘數的做法訪談學童，學童回答：因為不知道怎樣算出餘數，所以沒有計算餘數，直接將 $8\frac{1}{8}$ 罐當成答案；可見學童少有類似的解題經驗。實驗組學童曾在本單元中進行一個類似題的教學，但並沒有練習相關問題，因此答對率偏低。

<類型二>把商為帶分數的分數部份當成餘數：

$$5\frac{11}{16} \div \frac{7}{10} = 8\frac{1}{8} \quad A: 8 \text{ 罐}, \text{ 剩下 } \frac{1}{8} \text{ 公斤}$$

這說明了學童雖能以除法解題，但是無法察覺帶分數中的整數與分數仍是同一單位（ $8\frac{1}{8}$ 罐的意義是 8 罐和 $\frac{1}{8}$ 罐），而非不同單位。

【應用 4】真分數乘以整數，有多餘資訊的問題情境。在延後測中，對照組答對率 37%，實驗組為 53%，達顯著性差異。從試題中發現學童呈現兩種解題性錯誤：

<類型一>除法概念不清：以 $\frac{2}{3} \div \frac{1}{6}$ 列式，或 $\frac{1}{6} \div \frac{2}{3}$ 依樣作除法列式。

<類型二>以乘除混合列式： $\frac{2}{3}$ 盒裝一盤為本題多餘資訊，干擾到學童的解題策略。

【應用 5】是分數除以分數的包含除問題，學童大多能使用除法列式，部分學童的解題錯誤類型如下：

<類型一>缺乏「基準量」的概念，直接就以前面的分數除以後面的分數來解題 $\frac{5}{12} \div \frac{3}{8}$

<類型二>乘法解題，形成 $\frac{5}{12} \times \frac{3}{8}$ 。

其它屬於解題性知識的應用題如表九，雖然兩組的答對率未達顯著差異，但它們的答對率偏低，因此仍值得加以分析。

【應用 2】本題是以乘法解題，但因為有多餘資訊的存在（一包糖果有 48 顆），部分學童無法掌握，有些學童也未注意單位間的差異、題目中分數倍的意義，因此答對率不高。

【應用 6】由於本題是二元單位（公斤、公尺），學童難以判斷是哪一個數要當作被除數，或是除數，答對率偏低。本題中少數學童有線段表徵出現，但圖形和列式並無關聯，顯示學童仍不了解題目的意義。

【應用 7】是以部分量求出整體量，應該使用除法列式 $6\frac{5}{8} \div \frac{2}{5}$ ，但答對率低，學童的錯誤解題有以下的類型：

<類型一>以乘法解題： $6\frac{5}{8} \times \frac{2}{5}$ ，表示學童仍無法了解題意，以及乘除解題的差異。

<類型二>把分數倍當成被除數： $\frac{2}{5} \div 6\frac{5}{8}$ ，表示學童只是以除法依樣列式，把題目中先出現的數當成被除數。

表九 答對率偏低的應用問題分析

試 題	組 別	答 對 率		T 檢 定	
		後 測	延後測	後 測	延後測
【應用 2】一包糖果有 48 顆，恬恬帶了 $\frac{7}{12}$ 包糖果去郊遊，她吃了帶去糖果的 $\frac{3}{4}$ ，請問恬恬共吃了多少包糖果？	對 照 組	29%	25%	-.673	-1.393
	實 驗 組	37%	41%		
【應用 6】鋼筋長 $5\frac{1}{4}$ 公尺，重 $3\frac{7}{12}$ 公斤，1 公斤的鋼筋長多少公尺？	對 照 組	32%	22%	-.653	-1.446
	實 驗 組	40%	38%		
【應用 7】一條彩帶的 $\frac{2}{5}$ 是 $6\frac{5}{8}$ 公尺，問這條彩帶有多長？	對 照 組	32%	28%	-.892	-.862
	實 驗 組	43%	38%		

*p<.05, **p<.01

3.小結

從對照組與實驗組學童對應用問題的答對率發現，學童的整體答對率在 40% 到 57% 之間，未能達成教育部要把數學教材的難度提升到前五、六成學童學習為主（民生報，2003）的目標。雖然本研究運用問題對比、涵蓋各種語意結構與情境結構、以及討論式教學等多種策略進行教學，但仍未達成目標。分析發現，在七節課的教學過程中（這是實驗組與對照組老師共同商量，在現行課程中所能進行教學的最大限度），要把分數除以整數、分數除以分數等問題教完畢，又要重視解題性問題，實力有未逮。因此，未來若要把分數除法置於國小六年級進行教學，一定要增多教學時數，或者於國中一年級時，仍要進行相關概念的教學。

雖然兩組的學童答對率都未達成五、六成，但是實驗組的學習成效仍比對照組佳。兩組學童後測整體總分上無顯著差異，可見短期學習成效相近；但在延後

測中實驗組答對率較高，分析結果呈現顯著性差異，顯示實驗組的學習保留情況較為理想。

實驗組學童在延後測中呈現進步的原因，顯然是由於實驗教學重視圖像表徵的概念性學習，以圖像表徵使學童了解題意；且在布題時運用對比呈現不同類型題（等分除與包含除），並在適當時機使用討論教學法，讓學童在和教師的對答或同儕的交互質疑和回應中，建構自我的概念或知識結構；在課程進行中，遇到較難理解的應用題採用簡化的方法（將題目數字變小或改為整數）和圖形表徵，來促進學童的了解，所以即使經過一段時間，學童的學習仍有遷移的效果。

陸、結論與建議

一、結論

本分數除法的教學實驗採用以各種情境和語意結構布題，以解決問題為導向，輔以單位量轉換的觀點、圖像表徵、問題對比和討論的方式進行教學，協助學童理解分數除法的概念，進而讓學童察覺分數的除法算則。在教學過程中，除了強調利用單位量的轉換和圖形表徵理解分數除法的概念性知識之外，也重視程序性知識與解題性知識。

從實驗結果發現在表現概念性知識的作圖題中，實驗組不論在後測或延後測中的答對率均高出對照組許多，達到顯著性差異，同時實驗組的答對率將近八成，顯示假如我們想要在紙筆評量過程中了解學童對分數除法的概念知識，此時，運用單位量轉換的觀點，以及彼此有共識的圖像表徵是一種可行的方式。因為有共識的圖形表徵對學童在概念的表達上比利用文字描述的表達來得容易且節省時間。

在表現程序性知識的計算問題上，實驗組學童與直接指導算則的對照組學童的答對率無顯著性差異，但實驗組的答對率較高，且有七成多的答對率。

在表現解題性知識的應用題中，研究者以分數四則的布題檢測學童對試題情境和語意結構是否能清楚判斷，進而作出正確的解題。教學實驗結果發現，兩組學童的學習成效在後測中無顯著差異，但實驗組的答對率優於對照組，同時在延後測中達顯著性差異，實驗組明顯優於對照組，可見本教學實驗是有成效的。雖

然教學實驗中實驗組優於對照組，但實驗組的答對率仍偏低，除分數減法問題外，大部份問題的答對率在 23% 和 56% 之間，顯示分數除法問題的解題對學童而言較為吃力。

二、建議

從教學實驗以及結果分析過程中，本研究提出下列幾點建議：

(一) 分數除法的教學素材

本研究從文獻探討中發現，九年一貫數學學習領域課程綱要中所舉分數除法概念性知識的呈現方式對學童而言是一種較為抽象的思考方式，六十二年版教科書的呈現方式容易造成學童的誤解，八二年版教科書以及 NCTM 1998 Yearbook 的呈現方式雖然符合學童以先備知識解題的觀點，但處理方式太過煩瑣且不容易讓學童察覺分數除法算則。因此，研究者融合八二年版和六四年版的優點，設計出以單位量轉換的觀點，輔以六四年版圖形表徵的理解方式。從實驗組與對照組的教學實驗發現，它是一種可行的分數除法概念的理解方式，可以做為概念的教學素材。

本教學實驗設計為七節課，如果在更充裕的時間下，宜讓學童經驗自行建構分數除法的解題方式、以同單位分數解題、和倒數的方式解題，使學童分數除法的概念更為完備。

在九年一貫數學學習領域課程綱要的觀點下，分數除法的程序性知識的教學也很重要。研究者的教學實驗結果發現，我們僅是羅列一些計算題讓學童返家練習，並未在課堂上特意練習的情形下，學童的答對率不亞於傳統教學方式。因此，對分數除法的程序性知識的學習素材上，研究者建議可以運用各種題型，例如，真分數除以整數，帶（假）分數除以整數，真分數除以真分數結果為整數，真分數除以真分數結果為分數，帶（假）分數除以帶（假）分數的，並將數字的大小加以變化，容易與不容易察覺最小公因數（包括兩個分子、兩個分母、或一個的分子和另一個分母），讓學童返家練習，課堂上只要把這些題型適度融入文字題的教學即可。

無論從過去的研究文獻和本教學實驗的研究結果都發現，學童對分數除法問題的理解相當抽象，因此在分數除法的解題性素材方面，研究者建議應增加各種的題型，例如等分除和包含除（包含當量除問題）的語意結構，一維情境、二維

情境和連續量、離散量的情境結構，多餘資訊問題，非除法情境問題，有無餘數的除法問題等，讓學童有豐富的學習脈絡，使學童對分數除法的數感日益豐碩。

（二）分數除法的教學活動

由於分數除法的素材非常多樣化，例如分數除以整數的包含除，等分除，分數除以分數的包含除，和分數的其他解題性問題；若能利用問題對比的方式進行教學，學童將更容易察覺其差異，同時，測驗結果發現實驗組學童的解題性知識比對照組佳。因此，在教學活動中，研究者建議以問題對比，加上單位量轉換與圖形表徵的方式讓學童察覺其間的異同。

由於分數除法的素材對學童而言較為抽象，且較難理解。同時學童的先備經驗不一定都相同，例如，在「5 公升的果汁可裝成 1 桶， $\frac{3}{5}$ 公升的果汁可裝成多少桶？」的問題討論過程中，研究者就發現學童的圖形表徵與研究者不同（參考本研究 13 頁）。因此，在教學活動過程中，研究者建議利用溝通討論的方式進行教學，讓學童從他的先備經驗過程中引導學童學習概念與解題，此時，學童對所學的概念將更有意義，能容易理解。

研究者建議在教學過程中，也能適時提供非分數除法問題（甚至有多餘資訊的問題）的解題活動，培養學童真正理解問題的能力。

（三）分數除法的評量

研究者的教學與研究經驗告訴我們，部份學童在進行評量時會去猜測老師可能的佈題方向；因此，研究者建議在進行評量時避免所有的問題都是除法問題，也要加入加、減、乘的題型，甚至多餘資訊的問題，養成學生真正了解題意後再進行解題。

分數除法的概念對學生而言較為抽象，因此，我們可以運用各種評量方式，例如在教學過程中，運用形成性評量，評量學生在學習過程中可能的學習問題，適時調整老師的教學。

對於紙筆評量，它是大量探究學童各個概念學習成效的可行方式。研究者建議評量時要同時重視概念性知識、程序性知識、和解題性知識，且各個知識的題型儘可能多樣化且和上述的分數除法教學素材配合。對於分數除法的概念性知識的理解則建議運用單位量的轉換輔以圖形表徵來探究，畢竟圖形表徵也是一種溝通的良好工具，是學童較易表達其概念的方式。

(四) 分數除法的教學時機

由於教學實驗的學校所採用的教科書設計，分數除法於六上進行七節的教學，及為配合學校教學進度，本教學實驗於六上進行七節課的教學。

教學實驗結果發現，學童在概念性知識和程序性知識的學習上能達成教育部要把數學教材的難度程提升到前五、六成學童學習為主（民生報，2003）的目標；但距九年一貫暫行綱要中期望 80%的學習能夠學習的目標尚有一點小小的距離。同時，分數除法的解題性知識則與教育部的期望相距甚遠。

因此，大家若認同九年一貫綱要在六年級進行分數除法教學，研究者建議可以提高教學節數至十節以上，以便讓學童有機會作充分的討論、學習各種解題性問題，使教師能適時作診斷教學，以達到較高的學習效果。甚至也可以考慮進行文獻探討一節所談的各種不同分數除法概念的教學，使學生的分數除法概念表徵能相互連結、使分數除法概念更加完備。否則可以考慮九年一貫暫綱的觀點，在七年級學童有較好的認知能力時再進行分數除法的教學，相信如此才更有可能達到 80%的教學預期目標。

致 謝

本文是國科會專題研究計劃編號：92-2522-S-133-002 的部份結果。感謝在本研究中所提及的所有參與教師以及學童們分享他們的學習經驗，有了他們的參與使本研究得以順利完成。文中論點為作者所有，不代表國科會。

參考文獻

一、中文部分

國中小數學難度要加深（2003.02.23）。民生報，A02 版。

李源順和林福來（2000）。數學教師的專業成長－教學多元化。師大學報：科學教育類，45(1)，1-25。

周柏達（1999）。國民小學數學科新課程實驗班與普通班分數學習表現之比較研究。臺北市立師範學院，國民教育研究所碩士論文，未出版，臺北市。

- 國立編譯館 (1996)。國民小學數學課本，第十一冊。國立編譯館。
- 國立編譯館 (2002)。國民小學數學課本，第十一冊。國立編譯館。
- 教育部 (2000)。國民中小九年一貫數學能力指標暫行綱要。臺北：同作者。
- 教育部 (2003)。國民中小學九年一貫數學學習領域課程綱要。臺北：同作者。
- 教育部台灣省國民學校教師研習會 (2001)。國小數學教材分析—分數的概念與運算，40。
- 陳竹村、林淑君、陳俊瑜 (2001)。國小數學教材分析—分數的數概念與運算，國立教育研究院籌備處。
- 湯錦雲 (2002)。國小五年級學童分數概念與運算錯誤類型之研究。國立屏東師範學院數理教育研究所碩士論文，未出版，屏東市。
- 甯自強 (1993)。「建構式教學法」之教學觀-由根本建構主義的觀點來看。*國教學報*(5)，33-42。
- 楊壬孝 (1988)。國中小學生分數概念的發展。國科會計畫研究發展。
- 楊瑞智 (1999)。探究師院生之分數基本概念及分數概念的課室教學。*臺北市立師範學院學報*，31，357-382。
- 劉秋木 (1996)。國民數學科教學研究。臺北：五南。
- 鍾靜 (1996)。數學教室文化的新貌。*嘉義師院 85 學年度數學教育研討會*。
- 鍾靜、許馨月、翁嘉聲 (2001)。專家教師經營討論式數學教學之個案研究。載於「九十學年度師院學院教育學術研討會論文集」，1789-1820。

二、英文部分

- California Department of Education (2000). *Mathematics Framework for California Public Schools-Kindergarten Through Grade Twelve*. 2000 Revised Edition. California Department of Education.
- Flores, A. (2002). Profound understanding of division of fractions. In Litwiler, B., & Bright, G. (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions*. National Council of Teachers of Mathematics, Inc., Reston, VA. 237-246.
- Huinker, D. (1998). Letting fraction algorithms emerge through problem solving. In Morrow, L.J., & Keenney, M. J. (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics. 1998 Yearbook*. National Council of Teachers of Mathematics, Inc., Reston, VA. 170-182.

- Lesh, R. (1981). Applied mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 235-264.
- Litwiler, B., & Bright, G. (Eds.). (2002). *Making sense of fractions, ratios, and proportions*. National Council of Teachers of Mathematics, Inc., Reston, VA.
- Morrow, L.J., & Keenney, M. J. (Eds.). (1998). *The teaching and learning of algorithms in school mathematics. 1998 Yearbook*. National Council of Teachers of Mathematics, Inc., Reston, VA.
- NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics, Reston.
- Sharp, J., & Adams, B. (2002). Children's constructions of knowledge for fraction division after solving realistic problems. *The Journal of Educational Research*, 95(6), 333-347.
- Sharp, J. (1998). A Constructed algorithm for the division of fractions. In Morrow, L.J., & Keenney, M. J. (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics. 1998 Yearbook*. National Council of Teachers of Mathematics, Inc., Reston, VA. 198-203.
- Sharp, J. M., Garofalo, J., & Adams, B. (2002). Children's development of meaningful fraction algorithms: A Kid's cookies and a Puppy's pills. In Litwiler, B., & Bright, G. (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions*. National Council of Teachers of Mathematics, Inc., Reston, VA. 18-28.
- Sinicrope, R., Mick, H. W., & Kolb, J.R. (2002). Interpretations of fraction division. In Litwiler, B., & Bright, G. (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions*. National Council of Teachers of Mathematics, Inc., Reston, VA. 153-161.
- Von Glaserfeld, E. (1990). An exposition of Constructivism: Why some like it radical. In R.B. Davis, C. A. Maher and N. Noddings (Eds.), *Constructivism views on the teaching and learning of mathematics* (pp. 19-29). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

The Teaching Experiment on Fraction Division

Yuan-Shun Lee*、Hui-Feng Hu**

ABSTRACT

The purpose of research is to design a teaching plan for fraction division, to make teaching experiment with six grade of elementary school, and to compare its' effect with teaching of general teacher, finally to make suggest for teaching fraction division. The methodology is quasi-experimental method. Data collected by teaching plan, teaching video, teacher and students' interview, and assessment testing. Reliability and validity are checked with content validity, expert validity, and split-half reliability by above data. After literature investigation, our teaching material emphasize on conception knowledge, procedure knowledge, and problem-solving knowledge. In conception knowledge, we use graphic representation with unit transformation to help students to understand fraction division conception. In procedure knowledge, we plan many types of fraction division for students to drill. In problem-solving knowledge, we consider semantics structure, situation structure, and non-routine problem for students' learning. Our teaching actions emphasize communication teaching, and we use conception comparing and problem simplifying to help students understand conception and problem. At the same time, we use non-division problem of fraction to check students' conception of learning. The result of teaching experiment is better than tradition teaching method. Finally, we reflect on this teaching and recommend about teaching material, teaching action, teaching assessment, and teaching suitable time.

Key word: fraction division, conception knowledge, problem-solving knowledge

* Professor, Department of Mathematics and Computer Science Education, Taipei Municipal Teachers College

** Teacher, Taipei Mandarin Experimental Elementary School

