從兒童迷思概念之文獻分析
談機率單元的教學與課程

陳欣民　　劉祥通

國立嘉義大學數學教育研究所

（投稿日期：90 年 10 月 20 日；修正日期：90 年 11 月 21 日、12 月 14 日；
接受日期：91 年 1 月 8 日）

摘要

本文從有關兒童機率概念之文獻中蒐集兒童機率迷思概念的種類，並將之整理、分類。文中並指出克服機率迷思概念之方法。最後作者針對文中所述之迷思概念類型提出以下於教學與課程上之建議：1)採用「提問代替講述」的機率教學策略，2)設置機率教學模型或設計機率教學之具體活動幫助學童學習，3)課程中放入與機率迷思概念有關的問題情境，與 4) 宜注意分數或比例和機率課程引入時間的先後順序。

關鍵詞：機率概念、機率迷思概念

緒論

當你看著氣象報告預測著次日的降雨機率，盯著股價行情盤算著哪一支會漲，甚或在大選期間猜著哪一個候選人會當選……這些小至日常生活之瑣事，大到足以影響到國家社會之鉅事，都是「機率事件」的呈現。由此可見，學習「機率」這門科目的重要性不容待言。機率，以較爲學術的角度來看，是指：在大量的重覆試驗中，可能會呈現一定的規律性，我們將刻劃事件發生的可能性大小的數量指標稱作該事件發生的機率。

有關於機率課程方面，我國之 82 年新課程標準中機率的部份列出「從遊戲中瞭解機率的初步概念且指定爲大數法則」，並將機率初步的概念列入六年級新教材中，而美國數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics,簡稱 NCTM）(NCTM,2000)對八０年代數學課程所提出的建議中也明白列出由學前二年級至八年級的機率課程範疇，由此可見，不論我國或外國學者對機率課程均相當重視。然而，要真正去體會「機率」的意涵需要運用抽象的數學思維，對兒童來說比較困難，兒童在學習機率的過程中也容易產生迷思概念。若課程設計能以兒童之機率迷思概念爲出發點，引導學童修正自己的迷思概念，而教師在教學時能察覺並破除學童的機率迷思概念，相信對兒童的機率概念發展能收事半功倍之效。由於研究機率迷思概念的學者，如 Fischbein (1984, 1987, 1991)也曾探討諸多機率方面的直觀概念，因此，本文先介紹機率直觀概念及機率迷思概念之關係，再整理兒童在學習機率概念的過程中所易產生的迷思概念，並提出有關克服迷思概念的方法，最後於機率教學與課程上提供幾點建議。

兒童的機率直觀概念

所謂的直觀概念，是每個人自然而發的、幾乎是本能的一種信念。它是一種認知的型態，是腦中立即出現的意念，是不證自明(self-evident)的(Fischbein ,1987)。直觀概念可分爲兩種，一種是初始直觀(primary intuition)，指的是個體未受任何系統性指導，因個人本身經驗影響而發展的直觀概念，如認爲「太陽一定從東方升起」。另一種是二階直觀(secondary intuition)，後者是指個體在由系統性指導後所產生的一個新的認知信念，個體必須投入一個活動中才能獲致。如在課堂上受同儕文化、教材或是教師對

教材解釋之影響而產生的概念，如一位曾學過「大數法則」觀念之學生，當面對：「投一枚硬幣一千次，結果可能是什麼？」的問題時，可能馬上產生：「差不多一半一半。」的這種想法。

直觀概念可能是對的，亦有可能是錯的，錯的直觀概念便歸屬於迷思概念的範疇了。特別值得注意的是，Fischbein(1984)認為直觀概念是「可調適的」，也就是可受到系統性的指導而改變，因此藉由教學，便可以教導兒童機率概念或改正兒童的機率迷思概念。底下我們將介紹幾種機器迷思概念的類型，及簡述破除迷思概念的方法。

兒童的機率迷思概念

「迷思概念」(misconception)意指：學生在某一特定學科中，對於面臨現象或問題時，為了要瞭解、解釋所遇到的那個問題，會使用一些信念、方法和「內在架構」。例如人們在做機率判斷時常會使用一些捷思策略(heuristic strategies)(Tversky & Kahneman, 1974)，這些捷思策略時常造成快速且大致上合理的結果，但卻往往和機率理論相違背。由是，當學生帶著這些先入為主的知識架構進教室學習時，反而造成教學和學習上的困擾(Konold,1991,1993)。

茲將學者歸納出，學生在面對機率問題所可能存有的迷思概念分述如下：

一、代表性捷思策略（representativeness heuristics）：

採用此一策略的人們，對可能的事件作決定時是基於事件分配的情況是不是能確實地反映出母群體的分配，或者對事件之樣本空間的抽樣過程是否符合隨機，即使單一事件也不例外(Kahneman & Tversky,1974; Shaughnessy,1977; Fischbein & Gazit,1984)。此事件又可細分為下列幾種典型：

(一) 符合母群體隨機過程分配典型

受試者傾向於認為樣本的抽樣，必須能反應母群體的分配情形，如此才符合隨機化的過程。(Kahneman & Tversky,1972；Shaughnessy,1977; Shaughnessy,1992)如：當受試者被問及面對六個小孩的出生序列，何者最有可能發生？若提供的選項為(A)男女女男女男(B)男男男女女女； 研究結果發現，大部份受試者選擇(A)，因其過程較符合代表性的隨機化分配，且符合 50-50 的分配；但實際上，在樣本空間的出現機會中這兩種序列出現的機會是相同的。

(二) 符合理想母群體分配典型

受試者在面對機率問題時，會認為不同樣本點出現的次數比，應是與樣本點在理想母群體中的機率比一致(朱雅瑋，1997)例如：在投擲一枚硬幣的實驗中，若連續投擲六次，其可能出現的結果為何？會採取此代表性策略的學童相信，「正正反正反反」的順序比「正正正正正反」較易出現，因其認為這樣才能顯示出正面與反面出現的次數各佔一半。

(三) 正時近效應 (positive recency effect)：

若受試者發現在已出現的母群體中，有些樣本點出現的比例較大，則受試者有根據既存的母群體分配，以預測下次出現的機率何者有較大的傾向，這種方式稱之為正時近效應。例如連續投擲一枚硬幣六次，若前五次皆出現「正」，則採用此種策略的受試者會預測第六次為「正」(Konold, 1991)。

(四) 負時近效應（negative recency effect）：

負時近效應又稱為「賭徒謬誤」(Gambler”s Fallacy)。指若觀察者發現在已出現的母群體中，某些樣本點出現的頻率較多，則會推測下次出現這些樣本點的機會較少。以上一題例子為例，使用此一策略的人們會認為「第六次出現反面的機會較大」(Konold,1991)。

二、可獲性捷思策略(availability heuristics)：

使用此一策略，人們在對事件做預測是建基於「內心對特定例子的容易程度來估計事件發生的可能性」，也就是說，傾向於利用容易建構、容易記得或容易從記憶中喚起的例子來做預測（Tversky & Kahneman,1973,1983；Shaughnessy,1992）。例如：大部份的學生認為「從 10 人中分組，2 人分為一組」的機率比「從 10 人中分組，8 人分為一組」的情況容易產生，而事實上這兩種情況產生的機會是相同的。

三、結果取向(outcome approach)：

使用結果取向的學生過於把注意力放在「結果」上，而忽略了「機率」機率的真正意涵。使用此一策略的學生會認為最主要的目標是「對下一次試行的結果作出正確的決定」，而非估計其發生的可能性(Konold,1991)。他們不但會以 50%的機率做為指標，用來判斷某事件是否發生的依據，也傾向去解釋「何以有那樣的結果」。比如，他們會認為「70%」指的可能是「70%的溼度」或「70%的雲量」。

四、忽視樣本空間大小對預測準確性之影響：

受試者在處理機率問題時，忽視了樣本空間的大小，而只根據前後次數比例推測

(Schrage,1983)。也就是說，受試者在面對樣本點分配均勻，或樣本點次數比值相同的不同的試驗時，會依其所呈現出的比例關係來做爲判斷機率大小的依據，而未考慮其試行次數的不同，因爲不同的試行次數，代表不同的樣本空間大小。例如：學生會將「投擲一枚硬幣十次出現五次正面」的機率，和「投擲二十次出現十次」的機率視爲相等，因爲他只用簡單的比例關係「5/10=10/20」去判斷機率大小，卻沒有考慮此二者之樣本空間大小並不相同，其機率所表示的意義也不同。

五、對稱性機率實驗與非對稱性機率實驗

在機率實驗之樣本空間中，每一樣本點可能發生的機會在直觀上是相等的，即謂「對稱性機率實驗」；反之，則謂「非對稱性機率實驗」。如林燈茂(民 81)的研究結果發現，國小職前教師在判斷「明年元旦上午 10 時的天氣可能出現晴天的機會有多少？」傾向回答「1/3」，即是使用了對稱性機率思考。但實際上，天氣變化不是對稱性事件。

六、以絕對差異的大小為依據

受試者在面對機率試驗時，會依據各樣本點出現次數的差異大小，或以試驗中各樣本點個數的差異來作爲判斷的依據，而非以比例性的觀點來預測事件可能性的大小（施能宏，1997）。例如，學生在面對題目「小華和大明分別投擲一公正的 10 元硬幣 10 次和 20 次，小華投 10 次，出現正面 3 次反面 7 次；小明投 20 次，出現正面 6 次反面 14 次，請問誰的正面反面次數比較均勻？」時，會用「7-3=4，14-6=8，8＞4,所以小華的投擲比較均勻」的想法來作答而非化成比值加以比較(林燈茂，民 81)。

七、判斷事件發生的可能性時，所使用的錯誤想法

以下兩種爲學童在判斷事件發生的可能性時，很容易犯錯的問題：第一種是「“必然”(certain)、“可能”(possible)、和“不可能”(impossible)的事件」，第二種是「複合事件（compound events）」(Fischbein,1991)。舉例來說，學生會以「很有可能」代替「必然」之用語，以「很少」來代替「不可能」。例如持此概念的學童言會認爲轉一個有 100 個刻度的轉盤，「出現 31」是「不可能」的，因爲「機會太小了」。可見，他們對「必然」概念的理解遠比我們想像得還難。至於「複合事件」，如學生在回答問題「同時丟兩個骰子，一個出現 5 一個出現 6 的機率大，還是兩個都出現 6 的機率大」時，會忽略「一個出現 5 一個出現 6」的情況有兩組，而認爲「兩者機率相等」的錯誤思考。

八、做機率比較時以目標物的大小為依據

Siegler(1981)的研究指出，有些學童會以目標數的大小做爲判斷機率大小的依據。他認爲持有此種迷思概念的學童會使用以下三個規則去判斷機率的大小：第一個規則是只看目標數大小，目標數大即機率大。如判斷題目「甲袋中有 8 粒紅球 4 粒白球，乙袋中有 6 粒紅球 2 粒白球，從哪一袋中抽中紅球的機會大？」時，持此規則的學童只看紅球個數並答甲袋。第二個規則是只看非目標數大小，非目標數小則機率大，如面對上述題目，因爲乙袋中白球數較少，所以乙袋大。第三個規則是同時考慮目標數和非目標數間的差異，目標數相同時便比較非目標數大小，非目標數相同時則比較目標數的大小。但當兩者皆不相同時，便混淆而無法判斷。

根據以上所提及之迷思概念，筆者認爲可依解題策略的類型和學生犯錯之原因將之精簡成以下五類迷思概念：1.捷思策略——本文提到兩大類捷思策略，一是代表性捷思策略，另一是可獲性捷思策略。其中，使用代表性捷思策略的學生認爲能反映出母群體分配或看似隨機的機率情況最容易發生，而使用可獲性捷思策略的人則傾向於利用容易建構、容易記得或容易從記憶中喚起的例子來做預測。2.結果取向：不能了解機率這種「或然率」的意涵，反而著眼於「結果」之探討。3.與樣本空間和樣本點有關的：因忽視樣本空間大小而影響預測之精準性，或無法列出完整之樣本空間，以及不了解樣本點的機會不同以致於將非對稱性機率誤認爲對稱性機率事件。4.因缺乏比例概念以致影響做機率比較的能力。如做機率比較時以絕對差去計算或以目標物的大小爲依據。5.不能確實掌握「必然」與「不可能」等用語。

克服機率迷思概念之方法

誠如 Fischbein(1984)主張機率迷思概念可經由教學以改正，我們將提出幾個克服機率迷思概念的教學方法。這幾個方法的類似之處在於先讓學生去預測事件發生之結果，再讓學生實地做試驗，讓其先前的迷思概念與實際結果產生衝突，教師再從旁協助學生破除原有之迷思概念，以建立正確的機率概念。克服迷思概念之方法如下：

(一) 以「預先猜測」與「結果驗證」的比對方式教學

當學生面對自己的先前想法與實驗證據相異而產生的衝突時，爲了去解決衝突，會調整自己的想法而建立另一個正確的機率概念模式，而學生之直觀概念和他們實驗的觀察結果會慢慢由所建立之機率模式所調和(Shaughnessy,1992)。因此教師不妨透過

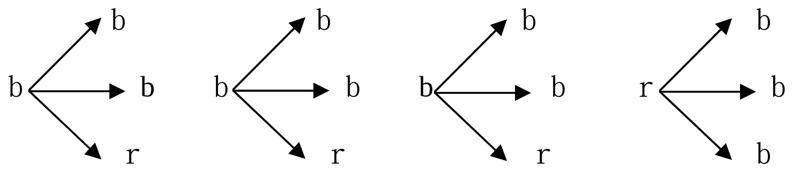
「預先猜測」與「結果驗證」的比對方式教學：教師先佈置一個機率問題情境，讓學生先做結果預測，再執行實驗，根據實驗的過程中收集並組織所得的資料來回答問題，最後教師要求學生比對實驗結果與最初預測，且說出經由實驗後所解決的概念衝突，及所得到之新的機率概念。

(二) 透過合作學習之教學活動，協助學生去檢驗自己的機率基本信念

學生在學習機率時自己有一套連續且深入的內在信念，這些信念有可能是錯的，但學生不易去察覺或改正(Konold,1991)。若能讓學生改變自己原先錯誤的基本信念，在克服學生的機率迷思概念上可收事半功倍之效。因此教師可先安排一個教學活動，在活動之初先讓學生各自說出自己對結果的預測，並與其他學童做比較，並要求學童檢驗自己的內在信念有無一致？與他人的信念有無一致？在活動進行的過程中，學童也持續的檢視自己的信念變化，並觀察自己的信念和實際的結果有無一致。舉例來說，在面對「一次丟一枚，連續丟五枚硬幣」的問題情境時，學生發現別人和自己持不同的意見，有人認爲出現「HTTHT」的機會比「HHHHH」的機會大，有的認爲一樣大。這時便要透過實際試驗來證實誰的信念正確。而在試驗後，教師從旁引導學生去省思自己的信念和實際的觀察是否一致？不一致的原因爲何？並比較自己與他人的看法，相互辯證。在這樣層層的檢驗下，學童較易發現自己先前不當的迷思概念並破除之。

(三) 以「樹狀圖」爲機率教學模型

Leslie 和 Kenneth(2000)針對兒童機率直觀概念設計了一個教學模組，共包含七個活動，先以機率遊戲(probability games)讓學生遭遇概念衝突，再顯示樹狀圖(tree diagrams)以改變學生的直觀概念。例如，他們將學生分爲 A 隊和 B 隊，在袋中分別放入三藍一紅顏色的球，兩隊的學生各由袋中抽取一球後放回，連續抽 50 次。若抽出兩同色球，則 A 隊得一分，若不同色，B 隊得分。在實際抽取前，學生莫不直觀地認爲因爲有三個藍色，所以拿到兩個同色的機會大。但實際丟擲之結果，兩隊的得分竟相當接近。這時，學生原本的直觀想法遇到衝擊，於是研究者利用樹狀圖爲教學模型向他們說明實際的樣本空間情形(圖一)，可見出現兩藍和一藍一紅的機會相等。學生因而改善了己身的直觀概念。這個方法也值得我們參考。



圖一　以樹狀圖表示樣本空間

建議

經由上述的文獻探討,我們發現，兒童在學習機率時，可能帶有某些迷思概念，甚至如文中所述，連國小職前教師都可能未具有充份的機率概念知識(林燈茂，民 81)!這樣的現象是不容忽視的。我們知道，教學者本身必須具備充份的機率知識及對兒童所可能產生的機率迷思概念有所了解，才能幫助兒童克服其迷思概念且獲得正確的知識。因此，本研究的主要目的，是希望以檢視兒童迷思概念的角度，對教師教學及課程編排提供建議，期盼能將破除兒童機率迷思概念的理念引入教學和課程，以幫助學生建立完整且正確的機率概念。以下便分別對教學及課程上提出研究者的幾點建議：

一、由兒童迷思概念看教師教學

本文列舉了八項兒童機率迷思概念，現經由文獻或研究者實證所得結果提出下列幾項有效的教學策略：

(一) 以質問代替講述，引導學生釐清概念：

以「代表性捷思策略」爲例，若教師發現學生相信若連續投擲一枚硬幣六次，出現「正正反正反反」比「正正正正正反」較易出現，因其認爲這樣才能顯示出正面與反面出現的次數各佔一半，而忽略了「每一次硬幣投擲都是獨立事件」。教師可藉由反問學生「硬幣有記億力嗎？它會記得前次試驗的正反面情形而影響到下一次的正反面嗎？」(Konold,1991)學生經此一問，會發現硬幣既沒有記憶性，前次試驗和後次試驗對它來說是不可能相互影響的。這樣，便可以刺激學生對機率題目做更深入的思考和辨證，並能獨自去找出答案。

(二) 於課室中提供機率模形或藉助機率遊戲學習：

機率本身是很抽象的一個數學單元，教師若能透過圖示或具體物輔助教學，相信能收事半功倍之效。以下便分別解釋機率模形或具體物活動的意義：

1. 機率模型：如前述 Leslie 和 Kenneth(2000)以樹狀圖引導學生列出完整的樣本空間，便是應用樹狀圖將抽象的樣本空間概念具體化，如此學生較易掌握機率的兩大要素：樣本空間及樣本點。
2. 機率遊戲：如 Konold(1991)、Leslie 和 Kenneth(2000)的研究中也提到可以藉由猜拳、投骰子、抽球等常見的遊戲，讓學生去評估這些遊戲規則的公平性，進而去預測遊戲之輸、贏可能情況，如此，這樣的活動便隱含了機率的概念，並收「寓教於樂」之效。

上述所提的兩個方法，不論是藉由提問法或輔以機率遊戲，都是製造了一個「與迷思概念產生衝突」的情境，讓學生為了解決衝突以改變自身的迷思概念。此時教師的角色由「傳道者」轉而為「佈題者」，藉由一次又一次的追問、佈題造成學生先前概念遭遇衝突，激使學生進一步自行思考出正確答案。這樣的方式是從學生的迷思概念為出發點教學，可能在幫助學生建立正確機率概念上更為有效。這種精神也正符合本文文獻探討中所提到的克服機率迷思概念的方法。

二、由兒童迷思概念看課程編排：

值得我們關切的，是不論是我國 82 之新課程或九年一貫之教材，均沒有將容易引起兒童迷思概念之題材引入課程設計。一來是因國內對兒童機率迷思概念的研究文獻似乎不多，再則因目前為止很少對國小兒童之機率迷思概念作有系統的研究。(蔡文煥，民 87)。以下便就課程編排提出研究者的建議：

(一) 課程中放入與機率迷思概念有關的問題情境

課程中可多放入會引起與迷思概念衝突的情境，例如「連續投擲一枚公平的骰子，前五次都出現正面，第六次最有可能出現哪一面？」或是「氣象報告說明天的降雨率是 60%，這裡的『60%』是什麼意思？」。這樣的問題情境不但可以檢驗學生是否具有迷思概念，亦可促使學童進一步去思考事件發生可能性的意義。

(二) 宜注意分數、百分比或比例和機率課程引入時間的先後順序

在我們所探討的迷思概念中，有兩則是因學童缺乏機率之先備知識以致於錯誤解

題的例子，即「以絕對差異的大小爲依據」和「做機率比較時以目標物的大小爲依據」這兩種迷思概念。我們知道，機率是指刻劃事件發生的可能性大小的數量指標，其值以「部份—全體」的分數型態來表示，「部份」指的是某一樣本點，全體指的是樣本空間。這樣的表示法亦含有百分比和比例的概念在其中。若學童缺乏這些先備知識，則會以相對差異的大小爲依據去解題。因此我們認爲，若兒童的分數、百分數或比例概念尚未建立完成，於學習機率時恐無法提升至量化思考的層次。因此在課程的編排上，宜注意分數、比例和機率課程引入時間的先後順序。

參考文獻

林燈茂(1992)。**11-16 歲學童之「相對差異」與「大數法則」概念初探**。彰化：國立彰化師範大學未發表之碩士論文。

施能宏(1997)。**國小高年級學生機率文字題表現之研究**。台中：國立台中師範學院未發表之碩士論文。

蔡文煥(1998)。國小統計教材機率初步概念之設計理念與實際。**國民小學數學科新課程概說(高年級)**(pp259-266)。嘉義：台灣省國民學校教師研討會彙編。

Fischbein, E., & Gazit, A.(1984).Do the teaching of improve probability intuitions? *Educational Studies in Mathematics, 15*,1-24.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach.* Reidel, D: Dordrecht.

Fischbein, E. (1991). Factors affecting probabilistic judgments in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics, 22*(6), 523-549

Fischbein, E. (1999). Psychology and Mathematics Education. *Thinking and Learning, 1*(1), 47-58.

Hawkins, A. & Dapadia, R. (1984). Children's conceptions of probability-A psychological and pedagogical review. *Educational Studies in Mathematics, 15*, 349-377.

Konold, C. (1983). Conceptions about probability: Reality between a rock and a hard place. *Dissertation Abstracts International, 43*, B4179.

Konold, C. (1989b). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction, 6*, 59-98.

Konold, C. (1991). Understanding students' beliefs about probability. In E. von Glasersfeld(Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp139-165). Holland: Kluwer.

Konold, C. (1993). Inconsistencies in students' reasoning about probability. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(5), 392-414.

Leslie A. and Kenneth L. S. (2000). Enriching students' mathematical intuition with probability games and tree diagrams. *Mathematics Teaching in the Middle School, 6*(4), 214-220.

National Council of Teachers of Mathematics(2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, Va: NCTM .

Sharge, G (1983). Misinterpretation of stochastic models. In Scholz, R(Ed.), *Decision Making under Uncertainty*(pp. 351-361) Amsterdam: New York North-Holland.

Shaughnessy, J. M. (1977). Misconception of probability: An experiment with a small-group, activity-based, model building approach to introductory probability at college level. *Educational Studies in Mathematics, 8*(3), 295-316.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. In D. Grouws(Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*(pp.465-494). New York:Macmillan.

Siegler, R. S.(1981) Developmental sequences within and between concepts. *Monographs of the Society for Research in Child Development*, *46*(2), 256-284.

Tversky,A. & Kahneman, D. (1973). Availability: A heuristic for judging frequency and probability. *Cognitive Psychology, 5*, 207-232.

Tversky, A. & Kahneman, D. (1974). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. *Science*, *185*, 1124-1131.

Tversky,A. & Kahneman, D. (1983).Extensional versus intuitive reasoning:The conjuntion fallacy in probability judgment. *Psychological Review, 90*(4), 293-315.

To Explore Instruction and Curriculum from Document Analysis of Children's Probability Misconceptions

Hsin-min Chen, Shiang-tung Liu

Graduate Inititute of Mathematics Education, National Chia-Yi University

Abstract

This study collects and classifies the types of children's probability misconceptions from the literatures about children's probability conceptions. And we mentioned some researches about how to overcome the misconceptions. At the end, we recommended several implications from this study as follows: 1) adopting problem posing instead of explaining the strategies of problem solving, 2) demonstrating probability models, or designing concrete activities of teaching probability for children, 3) putting some probability contexts about misconceptions in the course, and 4) taking attention of teaching materials about the order of fraction、proportion and probability.

Key words：probability conceptions、 probability misconceptions