分析學生解比例問題文獻

－國小數學課程與教學的建議

沈明勳　劉祥通

嘉義大學數學教育研究所

（投稿日期：91 年 3 月 15 日；修正日期：91 年 5 月 1 日、5 月 31 日；接受日期：91 年 6 月 3 日）

摘要

在日常生活中，比例的相關用語經常被用來描述生活的問題，且解比例問題能力是決定能否學習更高層次數學的重要分界。由此可見，發展比例推理能力的重要性。但是，在學生數學知識的學習過程中，比例問題卻成了國小學生的難題。於是，比例問題的教學就成為國小教師的重要課題。

為了幫助教師解決教學上的難題，本文從比例問題的相關文獻中，介紹比例的意義、描述比例關係的本質、探索解比例推理時所需具備的基本能力、列出國小學生的解題策略，進一步分析影響學生解比例問題的相關因素。最後，根據文獻的解析提出了比例問題課程編排上與教學上之建議，供課程編排者和教學者參考。

關鍵詞：比例問題、解題策略、國小數學

壹、前言

比例問題在國小學生來說是一個重要的主題，而它在課程中所出現的比重以及相關概念的引用佔了很大的部分，且在日常生活中也常常應用到比例的概念，因此，對於學習更高層次的數學概念來說，比例概念將會是一項基礎的能力。例如，國中階段學習三角形的相似概念，以及高中的三角函數及黃金比例分割，學習前都要有基本的比例概念，才能充分了解這些題材。因此，我們可以說比例概念的建立可以是基礎數學（國小階段）與學習高等數學（國高中及大學）的橋樑。而解比例問題對於數學學習的重要性就不可言喻了。

比例概念既然如此重要，但研究顯示：許多的成年人並不熟悉比例的概念（Capon & Kuhn 1979）。林福來（1984）的研究也指出：多數的國中學生對於處理比例問題亦有困難。究竟哪些因素影響解比例問題呢？數字問題的倍數關係與否是很重要的關鍵（Noelting, 1980b; Hart, 1981），其次，問題素材類型也是影響學生解比例問題成功與否的關鍵因素。另外，根據 Lamon（1993）以及楊錦連（1999）的研究顯示，不同語意結構的比例問題會影響學生解題的表現。因此學生在數學知識的學習過程中，比例問題儼然成為國小學生的難題，而比例問題的教學就成為國小教師所應注意的重要課題了。

為了幫助教師解決教學上的難題，本文從相關文獻中，介紹比例的意義、描述比例關係的本質、探索解比例推理時所需具備的基本能力、列出國小學生的解題策略，並進一步分析且歸納出影響學生解比例問題的相關因素。最後，根據文獻的解析提出了比例問題課程編排上與教學上之建議，供往後課程編排者和教學者的參考。

貳、相關文獻分析

一、比、比值、比例的意義

當我們要表示兩個數量 A 和 B 之間的對等關係時，用數學符號 A：B 來代表，這就是「比」。但是 Hart（1981）則認為比是表示兩個數量之間比較的關係。例如，棒球比賽中兩隊的成績比數用 1 比 2（1：2）表示，從比較的觀點來看，比可以表示兩個數量之間的一種關係，也可以作為傳達相對大小的抽象意義的一種比較性指標（Lamon, 1995）。另外，「a：b」中將前項（a）除以後項（b）所得的商稱為「比值」，而「比值」通常是以分數的形式表示。

「比例」的基本定義是當兩個比的比值相等時，就稱這兩個比成比例。「比例關係」則是利用具有相同對等關係的比或比值所構成的關係式，我們稱之為比例關係。就如同將相同的

單位量做不同的等分除的分割，會有不同的等值分數產生，而將等值分數寫成等式，則就產生比例關係的概念。

二、比例關係的特質

提到比例，就要說明比例關係間的變化，一般來說比例關係通常是以ａ：ｂ＝ｃ：ｄ的形式呈現，我們需清楚四項數量之間的彼此關係，才可以知道比例關係的真正意涵。以下針對比例關係中「共變性」與「不變性」的特質描述如下：

Lamon（1995）認為組成比的數量之間，在相同的情況下數量間是具有「共變性」，而比與比之間的關係則保有「不變性」。換句話說，比例關係中各數量之間是存在所謂共變(covariance)與不變(invariance)的關係，是一種互依互存且緊密的變動關係。舉例來說，「拍賣會上，1 顆籃球可以換 5 顆棒球，現在我們有 3 顆籃球，可以換幾顆（15）棒球呢？」對於這樣的問題，我們知道籃球：棒球數目的比是 1:5 與 3：15，這兩個比例關係的比值都是$\frac{1}{5}$，是「不變的」；但是當我們將 1 顆籃球變成 3 顆籃球時，為了要維持籃球數與棒球數不變的比例關係（比值是$\frac{1}{5}$），原本的 5 就變為 15，也就是「15」隨著「3」共變以維持比值是「$\frac{1}{5}$」的等價關係。這種比例關係中前後項相關且隨著變動，就是前後項「共變的」關係。

三、比例推理的基本能力

在數學的解題過程中，解題者本身的學識能力與是否成功解題是息息相關的。因此，影響學生解題的因素首要考慮學生的基本能力為何？什麼先備知識是有利於解比例問題的數學知識，以下提出五點：(1).因數與倍數的瞭解，(2).乘除法情境的熟悉，(3).有理數（rational number）的相關概念，(4)相對思考能力(5)單位化與基準化的能力，分述如下：

(1) 因數與倍數概念的瞭解

在比例問題的解題過程中，學生常常可以利用因數和倍數的概念解決問題。而 Lo 和 Watanabe(1997)的研究結果也強調因數與倍數是解比例問題成功與否的知識基礎。以「12 元可買 8 顆糖果，9 元可買幾顆糖果？」為例，學生的解法為：利用嘗試錯誤的方法將 12 元分成 4 份，每份有 3 元；再試著將 8 顆糖果分成 4 份，每份 2 顆。如此將錢數和糖果數都分成 4 份後，再利用 3 元 2 顆，6 元 4 顆，9 元可買 6 顆的方式求解。如果學生可以有因數概念，就可先把 12 和 8 的公因數找出，而直接將 12 和 8 除以公因數，就可以縮短嘗試錯誤的時間。再者，劉祥通和周立勳（1999）強調，解比例問題往往是要先做除法再做乘法，也就是解因

數與倍數的問題，因此因數與倍數概念可以是比例概念的基石。

(2) 乘除法情境的熟悉

Vergnaud（1983） 就提出了「乘法概念體」的理論，提到比、比例、分數、因數、倍數、速率、函數等概念與乘除法之間的關聯。又根據 Lo and Watanabe(1997)的研究證實比和比例概念的發展是內崁於乘法概念的發展之內。因此乘除法問題的了解將會影響到學生解比例問題。Vergnaud（1988）又提到乘除法問題是比例問題的特例，例如，a 個披薩給 b 個人吃，請問 c 個披薩可以給多少人吃？這是道地的比例問題。但是若將上題改成「1 個披薩給 b 個人吃，請問 c 個披薩可以給多少人吃？」，就是乘法問題了；若是上題改成「a 個披薩給 1 個人吃，請問 c 個披薩可以給多少人吃？」，又變成是除法問題。因此，吾人也可以說比例概念是乘除法概念的上位概念。學生如果能熟悉比例問題情境的隱藏的乘除法情境，將有助於比例問題的解決。

(3) 有理數的相關概念

有許多學者都認為比和比例是包含在分數概念之中，至少和分數是脫離不了關係，例如 Kieren（1980）就將分數分成五個面向，比就是其中一個。另外，Behr, Lesh,& Silver 也認為分數有七種子建構（subconstruct），比和比例就是其中兩種（引自陳敏華，1998）。而我們最常使用的分數類型就是將它表示成有理數的形式，有理數可以有很多不同的意義，例如，部分—全體（part and whole）、商數（quotient）、比率（ratio）、運算子（operator）的不同意義（Kieren, 1980）。而大部分的學生對於分數的概念大都只理解一、兩個意義，這樣是不夠周延的。甚至從學生解比例問題時也發現許多學生甚至只有部分—全體（part and whole）的觀點而已，無法以分數表示兩量的倍數關係。另外，一些學生並不了解可以用分數來表示分數除不盡的概念（楊錦連，1999）。例如，學生在解題中遭遇「5 除以 3」，學生往往在無法除盡時就放棄解題，殊不知可以分數的形式來表示除不盡的結果。由此來看，分數概念的不完整造成學生以除法的運算來求比值時產生困難，以致於影響學生解比例問題的成敗。

（4）相對思考能力

學生除了應有的知識基礎外，對於解比例問題應該還要有一些必備的能力。根據 Lamon（1997）認為相對的思考能力和比值的單位化能力是解比例問題的兩個重要的思考策略。所謂「**相對的思考能力**」是表示學生可以了解情境中數量關係的相對性。相對思考能力對於解比例問題是一項重要的基礎，因為比例是一種比較性的指標，表示一個數量與另一個數量之間的關係，而不是單獨一個數量的改變而已。而 Nohda 也說比是表示一個數值對於另一個數值的相對大小，「相對」正是比例問題中最重要的概念（引自陳敏華，1998）。舉例來

說，有兩位學生，一人 180cm 高，另一人 140cm 高，經過一年後兩人均長高了 10cm，以絕對思考的觀點來看，兩人都長高了 10cm，看似長了一樣高；但就相對的觀點來看，180cm 學生的成長率是 $\frac{1}{18}$ ，而另一人的成長率是 $\frac{1}{14}$ ，而 $\frac{1}{18}\langle\frac{1}{14}$ ，所以其實這一年來 140cm 的學生的成長速度較快。因此，相對思考能力是解比例問題的必要能力，而比例問題就是相對的問題。

（5）單位化與基準化的能力

Lamon（1994）提出了單位化（unitizing）和基準化（norming）的觀點可以幫助老師分析學生的解題想法，並進一步說明一旦集聚單位的觀念建立，而可以用此集聚單位來重新描述新的數量情境的過程。而所謂的「**單位化能力**」，就是在解比例問題時，先求出單位量，再利用單位量來解題。例如，一根 5 公分長的鐵棒重 3 公斤，同樣材質和粗細的鐵棒 4 公分有幾公斤重？對於這樣的問題，如果先算出 1 公分長有 $\frac{3}{5}$ 公斤重（$3\div5=\frac{3}{5}$），此即為單位量，再以此單位量算出 4 公分長有 $\frac{12}{5}$ 公斤重（$\frac{3}{5}\times4=\frac{12}{5}$），這就是比值的單位化。如果把單一物體當成一個單位時，這種單位稱為單項單位（singleton unit），當我們把幾個物體當成一個單位時，這種單位就是複合單位（或稱集聚單位），如我們將五個一數來數數時，五個一數就是一種複合單位。

至於「基準化的能力」，從 Freudenthal（1983）所提出的例子來看，「將地球的大小想成像一根針頭那樣大（大約 1 公厘），然後根據這樣的定義重新看待整個太陽系的大小。那麼太陽就變成是直徑只有 10 公分的球體，且太陽與地球的距離也變成只有 10 公尺而已。」這種以一個單位架構來推廣其他情境的方法，我們就可以說是一種「基準化」的過程，在學習數學中，這樣的思考是很普遍的。

所以 Lamon（1994）更進一步說明，參照單位（reference）或單位全體（unit whole）的觀念建立，與用此單位來重新詮釋新的數量關係，似乎是發展複雜數學概念的關鍵；而單位化和基準化能力的培養在解決比例問題方面將提供了關鍵性的機制（mechanism）。

四、解比例問題的策略

學生在做文字題的解題時，如果使用了錯誤的解題策略，則也將會得到解題失敗的結果，解比例問題時亦然。所以我們歸納出解比例問題基本與常用的思考策略與方法，分述如下：

1. **單價法思考策略**

解比例問題時先求出單位量，然後利用單位量乘以單位數的方式解答，在 82 年版數學新

課程中將此種解題策略稱為「單位當量策略」。一些研究上指出利用單位量解題的策略稱為單價法（何意中，1988；陳英傑，1992）。

例如，甲公司電信月租費 3 個月要 1800 元，另一乙公司月租費是 6 個月 3300 元，請問哪一家的月租費較便宜？當我們使用單價法解題，我們會將兩公司的月租費每月需要付出多少錢算出，甲公司 1 個月要 600 元，乙公司要 550 元，則比較 1 個月的單價就可以知道乙公司的月租費較便宜。由此可知，要使用單價法成功解題，學生還需要事先就具備單位化能力，如此才可以成功的運用單價法成功的解題。

2. 倍數法思考策略

根據以下例子，甲、乙兩根粗細和材質相同的木棍，甲棍長 12 公分，重 4 公斤，乙棍長 17 公分，那麼乙棍應該有多重？學生求出乙棍的長是甲棍長的（17÷12）倍，然後用 4 公斤乘以（17÷12）的策略，這種求出幾個公斤的方法就是倍數思考策略，亦稱為倍數法，也就是利用相對思考的能力來解題。

3. 累加法思考策略

學生解比例問題時，將比例問題列成四項的關係式（A:B＝C:D），也就是由一個比率關係擴充到第二個比率關係，此種策略關係的使用是採加法或減法而得。學生藉由連續相加的累加法來建立比例關係，例如，2 個蘋果賣 15 元，8 個蘋果可賣多少元？學生會用 2 個 15 元，4 個 30 元，6 個 45 元，8 個 60 元來求出答案。使用累加法策略解題，學生對於較簡單的問題均可以成功的解題，但是問題若是包含非整數的比率，則只有少數學生可以成功地使用此種策略解非整數比率的問題（Hart, 1981）。由此推論，學生利用累加策略解題，往往是學生不會做出比值，或是無法解決分數的乘除法問題所造成。

4 形式化解題－利用比例關係式

在高年級的學生，老師會教給學生利用比例關係式來解題，例如，A：B＝C：□，使用內項乘積等於外項乘積（C×B＝A ×□）的方法，可以求出□是多少； 或比值等於比值的等式（A／B＝C／□），用所謂的「十字交乘法」來解題。學生會用這種形式化解題的方式解題，理論上，他們已經對於數量間的關係有相當程度的認識。但是，國內的數學教學往往過早將形式化的數學傳授給學生，以致於有些學生只會套公式，實際上卻不知公式之所以然，若除去了公式，就解不出答案了。

五、影響學生解比例問題之因素

學童在解比例問題時，受到許多不同因素的影響，例如，語意類型、數字結構、素材類

型等各方面，以下將針對上述三方面分述如下：

（一）語意類型

在各項比例問題的相關研究中顯示，針對語意關係來探討學生解題表現的研究較少，而在教改的這一波大力改革之下，特別強調學生解決問題能力的培養，包含以語意類型分類的比例問題，因此更彰顯了語意的不同對於學生解題表現的影響。

根據國內外的相關研究顯示，國外學者 Lamon（1993）將比例問題分為熟知的量數、部份—部份—全體、聯想的集合、擴大縮小四種類型，以及國內數學實驗課程教師手冊第十冊依照語意的差異將比例問題分為交換問題、組合問題、母子問題、密度問題四種類型，綜合國內外的分類方法，把比例問題分為五類（如表一）。且根據楊錦連研究發現，六年級學生對於各類型的比例問題解題的困難度（由簡單到困難）是：交換和組合問題＜密度和母子問題＜伸縮問題。

表一：比例問題類型對照表

數學實驗課程	Lamon	舉例
交換問題		如果買 27 個汽球要 81 元，那麼買 54 個汽球需要多少元？
密度問題	熟知的量數	27 立方公分的石材有 18 公斤重，同樣材質的石材 50 立方公分有多少公斤重？
母子問題	部份部份全體	巧克力糖每 12 顆中就有 8 顆是紅色，現在有 60 顆巧克力糖，那麼紅色的有幾顆？
組合問題	聯想的集合	有兩條魚，每天吃的食物要靠身長來決定。甲魚長 12 公分，每天要吃 18 顆飼料，乙魚長 30 公分，每天要吃幾顆飼料？
（伸縮問題）	擴大縮小	甲、乙兩個相似（形狀相同，大小不同）三角形，甲的底是 24 公分，高是 10 公分；乙的底是 72 公分，請問乙的高是多少公分？

（二）數字結構

學生解題時，常常根據題目所給予的線索，擬出解題計劃，並用適當的解題策略來達成目標，但是當學生在讀完問題時，其想法與認知可能隨著問題情境或數字結構的不同而有所不同，所以不同的題目類型或數字呈現的結構不同對於學生解題來說將是有難易度的差異。

根據研究顯示，學生較擅長解決整數比的問題，對於非整數的問題覺得較為困難（Hart, 1981 ; Lo & Watanabe, 1997 ; Noelting, 1980b）。例如，鋼筋每 a 公尺的需要 b 元，買同樣的鋼筋 c 公尺需要多少錢？在這個比例問題中，會出現三種不同的類型的數字結構，(1)當 b/a 是整數倍 c/a 不是整數倍時，(2)當 b/a 和 c/a 都是整數倍時，(3)a、b、c 三數相互都沒有倍數關係時，而研究顯示出第（1）類的問題最簡單，而學生在解決第（3）類問題時覺得最為困難。

（三）素材類型

問題素材的類型往往與「外延量」和「內涵量」的概念有關。所謂的「外延量（extensive quantity）」就是可以直接計算和可加成性的量數，也就是數量可以相加減。例如多少錢、有多長、有多久、有多重等，在求總數時可以將數量直接加總；而「內涵量（intensive quantity）」則是由兩個不同屬性的量數所衍生出來的另一種新的數量，例如速率、單價和密度都是內涵量，速率是距離（distance）除以時間（time）；單價是由總錢數除以數量;密度（density）是物體的重量（weight）除以體積（volume），也可以說內涵量就是兩個不同外延量的比值。

依據不同的素材類型以及題目中牽涉到「外延量」與「內涵量」的問題（劉秋木，1995），學生解題時會因對題意的誤解，而運用錯誤的運算方式解題，使得學生往往誤以為內涵量是可加成的，例如「有兩杯不同溫度的水，一杯是 20 度, 一杯是 10 度，當兩杯水倒在一起後，溫度是幾度呢?」的內涵量問題，許多學生因為不了解溶液混合後會有什麼變化，看到「倒在一起」，而回答 30 度（20＋10）。學生對題目中的溫度性質（內涵量）不了解，認為溫度可以相加減，以致於採用加法策略，殊不知兩量混合後的溫度並不是由原先的兩量加成而得。

參、課程與教學上的建議

根據上述的相關文獻得知，比例問題對學生而言是一項不容易瞭解的問題。對老師而言，比例問題的設計與教學就成為老師的重要課題。而要讓學生輕鬆且無困難的學習比例問題，除了老師的教學以外，另一方面適當的課程設計編排也是決定學生能不能學習無礙的關鍵因素。因此，以下將針對課程設計與教學上提出幾點建議，分述如下：

一、課程上的建議

學校課程中的教科書以及相關補充教材，在學生學習數學概念時皆是不可缺少的，所以課程設計的好壞，將直接影響到學生的學習效果。以下將提出四點建議，作為老師設計課程或選擇教科書時的參考依據。

（一）教材編排應注意概念的銜接和先備知識的建立

數學是一門有結構性的學科，每個概念都或多或少都有所關聯，而由文獻得知，比例概念的發展與分數概念的瞭解是關係密切的。如前述 Behr, Lesh & Silver 和 Kieren 的研究中就提到，在分數所表現的類型中比和比值就是其中的一種方式。因此，學生分數概念的不完備，將會影響到學生經驗到比值時的不確定感，進而對比例推理的結構產生疑惑。所以課程的編排上應該在教比例概念之前，編排設計有關分數基本概念的釐清單元，讓老師在引導學生正式進入比例推理課程之前，先確認學生有關分數的先備知識是否清楚，如此才能夠了解學生對於概念的銜接與利用舊經驗解決新知識的能力是否已經具備。

因此，建議在課程編排上應把分數的相關概念安排在比例問題的單元之前，一方面可作為概念的再複習與提醒，另一方面也可在教比例問題前先將對於分數概念有迷失的學生進行補救，減低學習比例問題時的困難，避免學生是因為分數概念不完備而無法成功解題。

（二）對困難的素材類型，提供具體的日常生活情境於教材中

如 Tourniaire and Pulous（1985）的研究，學生的解題受問題所牽涉的素材類型影響很大，涉及內涵量的問題要比單純的外延量問題要困難。例如，在「不同溫度的溶液混合問題」與「求前後兩個路段的平均速率」中，學生對此類問題學生往往會採用「將兩個量數相加再求平均數」的策略解題，殊不知此等問題牽涉到內涵量，而內涵量與外延量不同，內涵量合成後的量是不可加成的。因此，老師在教內涵量的比例問題時，給學生具體經驗或利用實際操作理解「溶液混合時的溫度變化」、與「平均速率與路段長短的關係」，然後安排學生討論、與發表，俟學生了解後再介紹「總熱量÷總體積」以及「總距離÷總時間」的公式。

（三）有關幾何圖形的相似問題建議編入國中階段的正式數學課程中

相關文獻中發現：學生解比例問題時，對於「伸縮問題」的解題困難度最高。尤其是關於相似三角形的伸縮問題，例如「已知兩三角形相似，甲三角形底邊為 12 公分高為 9 公分，乙三角形之底邊為 8 公分，請問乙三角形之高應是多少公分？」的問題，學生往往用 $12\times9\div2=8\times\square\div2$，所以 $\square=18$。然而，在一位小朋友解「甲乙兩支電線竿的長分別為 12 與 6 公分，甲竿的影子長為 9 公分，請問乙竿的影子長為多少公分？」的問題，學生就會用「放大/縮小」的觀點來解題（劉祥通，2001）。以上兩個例子問題結構看似相似，但實驗研究卻發現有差異，

推究原因是小學生尚未具有相似三角形的對應邊與高成比例的觀點，以致於採用面積相等的公式處理，造成解題失敗。相反地，學生對於電線桿的問題具有「桿長則影子長，桿短則影子短」的直觀經驗，所以學生就能成功的完成解題。

因此，伸縮問題中的相似問題之比例推理，處在國小階段的學生對於此抽象的數學概念尚未有足夠的經驗與認識，建議暫不放在正式課程中，而可以作為補充教材或在國中階段再予以介紹，如此應可讓國小學童免於受到混淆的疑慮。

二、教學上的建議

一個教學的成功與否，除了要靠學生的努力學習與主動建構之外，還是需要老師的適時引導與鼓勵，所以老師教學技巧的熟練與本身知能的充足將也是影響學生學習的重點，在此將提出三點建議作為老師教學時的參考。

（一）教學者認識比例關係的本質—共變與不變，以掌握學生的解題想法

教學者對於數學學科知識的瞭解非常重要，劉祥通（2001）的研究發現：教師的數學學科知識不足往往無法成功的解讀學生的自發性解法。比例問題裡隱含著共變（covariance）與不變（invarience）的相互關係，以「甲乙兩支鐵棒質料與粗細都相同，甲鐵棒 13 公分長有 7 公斤重，乙鐵棒 9 公分長有幾公斤重？」為例，有的學生用「9÷（13÷7）」老師可能不知此答是正確的，若是老師知道「13÷7 與 9÷□」的不變關係（$\frac{13}{7}$與 9/□具有相同比值），就可推測「9÷（13÷7）」的解法很可能是為了求出□是多少（因為 9÷□=$\frac{13}{7}$，所以□＝9÷$\frac{13}{7}$），所以需要繼續追問學生的真正想法，唯其如此，學生的自發性解法才不致被誤解，一旦學生的解法不斷受到肯定，學生才樂意解題。

身為老師的我們，對於自己基本的學科知識的充實很重要，對於數學概念的源頭與本質為何，也是在教學前要先去釐清與瞭解的。如此，在教到比例推理的抽象概念時，對於學生的不同迷失概念和非正式的自發性解法的處理與應對，也是過去教學者在教學時所忽略的。

（二）教學的原則是給學生解題在先，公式的介紹在後

傳統的教學法常常強調公式的教學，然給問題讓學生用公式去套用。以教比例問題為例，若是直接介紹「十字交乘法」，也就是「內項乘積等於外項乘積」的方法，學生就會模仿老師的解法，並失去因解題所附帶的成長機會。甚至，長久使用公式教學的老師，學生縱使用自然解法解題，老師可能無法成功的掌握學生的解題想法，而失去幫助學生成長的機會。

例如，「甲乙兩支鐵棒質料與粗細都相同，甲鐵棒 13 公分的鐵棒有 7 公斤重，乙鐵棒 9 公分有幾公斤重？」學生用 7×9÷13，是先假設 1 公分有 7 公斤重，那麼 9 公分就有 7×9 公斤重，但是原來鐵棒是 13 公分長，所以再除以 13，老師卻以為學生用「十字交乘法」(劉祥通和周立勳，1999)，以上例子反映了教師長期也受公式制約，而影響了對學生解題的判斷，當然也未能給學生做適當的引導。

（三）教學者清楚問題難易，提問或佈題依照由淺入深的原則

教師佈題時往往會忽略了問題的難易度，例如題目甲：「3 小時走 5 公里，7 小時可走多少公里？」，比題目乙：「3 小時走 6 公里，7 小時可走多少公里？」要難，也就是答對甲題的比率要比答對乙題的低。但是，教師佈題時先佈甲題後佈乙題，忽略了解甲問題須具備以分數來表示「兩量相除的結果」的能力，教師在做佈題與教學時，應由淺入深的漸進方式，不該主觀的認定學生應該已經有這樣的概念或能力，而在提問時的語氣措詞也要是學生可以理解的，循序漸進的引導學生層次上的提昇。而在對於不同問題類型的描述時，也應在學生可以理解的範圍內作解釋，不然學生可能只是會記憶問題形式與解法，而非真正的理解問題。

（四）設計系列教學活動以協助學生學習完整的數學概念

本文之文獻已將比例問題分類為五大類，根據楊錦連的研究發現，數學實驗課程中所分類的密度問題（熟知的量數）對學生來說是不易處理的問題，而單價問題，速率問題、耗油量問題、以及濃度問題等都與密度問題相關，本質上都是牽涉到兩外延量相除得到的內涵量的問題。把密度問題類型中不同的問題情境並置成題組或單元，一方面讓學生增強對量數（measure quantities）的認識，另一方面也使學生在學習概念時可經驗到較多的日常情境。

如在一個比例的教學模組中，就將學生一些日常所經驗到的事物設計成單價問題、速率問題、耗油量問題的題組，讓學生可以在一個題組中學習到該類型的概念，且相同類型的問題也讓學生不會因為題目語意類型的不同而有所混淆。例如，(1) 大包洗衣粉重 5000 公克標價 85 元，小包洗衣粉 3000 公克標價 54 元，請問大包便宜？還是小包？（2）小明開了 3.5 小時跑了 240ｋｍ的路程才到達目的地，大明開了 4.5 小時跑了 310 公里，小明開的快？還是大明 (3) 甲車 5 公升的汽油跑 40 公里，乙車 3 公升可跑 25 公里？請問甲車省油？還是乙車省油？以上三題都是兩量相除產生第三量的比較問題，將三題並置為教學模組給高年級學生學習，除了讓學生獲得概念外，也可在不同情境的比較下產生類化的效果，讓學生獲得有意義的學習。

綜上所述，一個成功的學習課室除了要有適合的教材作為媒介，還需要教學者的正確引導。而老師本身的知能需要不斷隨著社會的變遷而充實，不斷吸收新的資訊以及學習適合學

生的教學方法，唯有生動活潑的學習環境配合老師的適當引導，才會讓小朋友主動且樂於學習。因此，如何充實老師本身的知能與利用所學，將是未來每位老師所要努力與達成的。

參考文獻

台灣省國民小學教師研習會（1996）：**數學實驗課程教師手冊第十冊**。

何意中（1988）：國小三、四、五年級學生比例推理之研究，**花蓮師院學報，2**，387-433。

林福來（1984）：青少年的比例概念發展。**科學教育月刊，73**，7-26。

陳英傑（1992）：台南師院學生比例概念的研究，**台南師院學報，25**，319-343。

陳敏華（1998）：**國小六年級兒童比和比例概念初探**。國立台中師範學院國民教育研究所碩士論文。

楊錦連（1999）：**國小高年級兒童解決比例問題之研究**。國立嘉義師範學院國民教育研究所碩士論文。

劉祥通（2001）：**實踐數學寫作以發展教師之佈題能力**。台北：文京圖書公司。

劉祥通和周立勳（1999）：國小比例問題教學實踐課程之開發研究。**國立台中師範學院數理學報，3**（1），3.1－3.25。

劉秋木（1996）：**國小數學科教學研究**。台北：五南書局。

Capon, N. & Kuhn, K. (1979). Logical reasoning in the supermarket : Adult females use of a proportional strategy in an everyday context. *Developmental Psychology. 15*(4), 450-452 ; 6;544-573.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures* . Dordrecht: D. Riedel.

Hart, K. M. (1981). *Children's Understanding of Mathematics 11-16,* London: John Murray Ltd.

Kieren, T. E.(1980). Knowing rational numbers:ideas and symbols. In M. Lindquist(Ed.), *Selected Issues in Mathematics Education*, Chicago:National Society for the Study of Education.NCTM.

Kieren, T. E. (1980). The rational number construct-Its elements and mechanisms. In T. Kieren (Eds.), Recent research on number learning(pp. 101-144). Columbus, OH:ERIC/SMEAC.

Lamon, J. (1993). Ratio and proportion : connecting content and children's thinking. *Journal for Research Mathematics Education. 24*(1), 41-61.

Lamon, J. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. In G. Harel & J. Confrey(Eds.). *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics*(pp. 89-122). State University of New York Press.

Lamon, J.(1995). Ratio and proportion:Elementary didactical phenomenology. In J. T. Sowder, & B. P. Schappelie(Eds),*Providing a Foundation for Teaching Mathematics in the Middle Grades*(pp.167-198). New York: State University of New York Press.

Lamon, J. (1997). *Ratio and Proportion : Elementary Didactical Phenomenology*. Chapter 8.

Lo, J. J. & Watanabe. T. (1997). Development ratio and proportion schemes : A story of a fifth grader. *American Education Research Association.*

Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept :

Part I-Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics. 11*, 217-253.
Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept : Part II-Problem structure at successive stages ; problem solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics. 11*, 331-363.
Tourniaire, F. & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning : A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics. 16*, 181-204.
Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh and M. Landau(Eds). *Acquisiton of Mathematics Concepts and Process.* Academic Press.
Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structure. In J. Hievert & M. Behr(Eds). *Number Concepts and Operations in the Middle Grades.* National Council of Teachers of Mathematics and Lawrence Erlbaum Associates.

Analyzing Literatures of Students' Solving Proportion Problems
－ Suggestions for Curriculum and Instruction of Elementary Mathematics

Shen, Ming hsun; Liu, Shiang tung

The graduate Institute of Mathematics Education
National Chiayi University

Abstract

In our life, the terms related to proportion are often used to describe daily problems. Also, the ability of solving proportional problem determines whether one can learn more advance mathematics. So, we can see the importance of development proportion ability. However, during the process of learning mathematics, proportion problem has been one of the most difficult problems in the Elementary school. Subsequently, the instruction of proportion problem has become very important task for those Elementary school teachers.

In order to help Elementary teachers overcome above difficulties problem of instruction, the authors review the literatures related to proportion problems. They, then introduced the meaning of proportion, described the essential of proportion relation, explored the fundamental abilities of solving proportion problem, and listed problem-solving strategies of Elementary students. In addition, the important factors of solving proportion problems are analyzed. Based from these documentary analyses, finally, the authors presented suggestions from curriculum settlements and instruction ideas for curriculum editors and instructors.

Key Words：Proportion problem、problem-solving strategy、Elementary mathematics