

融入動態評量之數感教學效益研究

劉琪玲¹ 謝哲仁²

¹高雄市博愛國小 ²美和技術學院

(投稿日期：92年1月16日；修正日期：92年3月25日、5月22日；接受日期：92年6月7日)

摘要

本研究旨在將數感動態評量融入現行學校的數學科教學中，以檢視其教學效益，並探討學生數感能力的改變情形。

本研究採準實驗研究，以第一研究者任教的四年級班級為實驗組，同校同學年的其它一個班級為控制組，進行為期2個月數感動態評量之行動研究。其中動態評量包含了教學與評量二部分：教學介入以「單元主題小組討論」與「個人學習單後續討論」二活動交叉進行；教學評量亦從量與質二方面著手，一是透過連續數次的個人學習單予以量化，以記錄學生數感能力的改變，另一則以學生的小組討論記錄單與個人學習單，為學生的數感能力改變歷程作質化的呈現。研究中並利用自編的數感能力測驗作為教學前、後測，以比較實驗組與控制組二組學生數感能力是否有所差異。茲將主要結果摘述如下：

一、數感動態評量具有教學效益：經過相依樣本 t 考驗，實驗組的後測成績明顯高於前測成績；以單因子共變數分析，實驗組後測成績也明顯優於控制組後測成績。

二、學生在數感動態評量過程中，數感能力在量方面的改變：經過相依樣本 t 考驗，每單元的連續5張個人學習單幾乎均有明顯進步。

三、學生在數感動態評量過程中，數感能力在質方面的改變：學生的概念被強化，思考變得靈活，策略顯現多元。在「分數的加減」、「除法」、「小數的加減」、「統計圖表」四個單元中，不僅能連結生活經驗、掌握數字的基準點作有效的估計、真正內化大數意義、彈性運用策略或工具解題，並能依不同情境作合理判斷，把數學帶入實際生活中。

關鍵字：數感、動態評量

¹ 本研究的順利完成得感謝台南師院謝淡宜、洪碧霞兩位教授的悉心指導

壹、前言

數感 (number sense) 是兒童對數字概念的理解與應用，學童利用已知的數學知識，來探究各種情境下數字、運算，以及其相互關係；同時，數感重視各種數學知識間的連結，自行發明有效的解題策略；數感並含有後設認知的能力，能夠彈性思考，作出合理的數學檢驗、判斷、批判與反省，這些特徵正是現在數學教育所希望達成的目標。數感因為強調數學的學習是有意義的，因此近年來一直受數學教育學者與認知心理學家的重視。早在八〇年代，許多先進國家就呼籲將數感融入正式數學教育的一環。例如：美國數學教師協會 (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1989)、美國教育研究中心 (National Research Council, 1989)、澳洲數學教育協會 (Australian Education Council, 1991)，均主張「數感」應是數學學習一個重要的要素，進而將「數感」列為數學課程及教學的主要目標之一。NCTM 更在 2000 年出版的「學校數學之原則與標準」中，強調兒童數感能力的發展。由此可見，注重數學思考與知識內化的數感能力，將是數學教育一個很重要的焦點及趨勢。

然而許多研究顯示，學生缺乏數感的情形普遍且嚴重 (Markovits & Sowder, 1994; Reys & Yang, 1998; 支毅君, 1997; 楊德清, 1998; Reys et al., 1999)。許多學者認為數感是可透過教學情境來建立的 (Silver, 1989; Reys, 1989; Trafton, 1989; Markovits, 1989; Sowder, 1992a, 1992b)，有些學者甚至進行研究來證明教學確實可行。法國數學家兼神經心理學家 Dehaene (1997) 雖證明大多數動物天生擁有數感，但也承認後天的教學與環境會更深、更廣地擴展數感能力。

因此，本研究希望能在數學教學中，融入自行設計的數感教學活動，以發展並提昇兒童的數感能力，並藉由與傳統教學的對照，以檢視其對數感能力提升之影響。此外，本研究期望透過動態評量 (dynamic assessment) 作為數感能力的教學與評量工具。由於動態評量兼重歷程和結果，亦扮演教學介入與教學評量二個角色 (吳國銘、洪碧霞、邱上貞, 1995; 莊麗娟, 1996; 林素微, 1996)，因此重視數學知識內化與意義理解的數感能力，頗適合在這種連續且動態的歷程中進行評量。把動態評量適當融入數感的教學活動中，正是本研究之核心所在。

本研究將自行發展數感的動態評量作為教學介入與教學評量之方法，使其融入國小數學教學中。藉由動態評量的進行，探討學生數感能力提升的歷程。同時編製一份數感能力的評量試題，作為一般教學的控制組與動態評量的實驗組前、後測之對照，

期能藉此瞭解學生數感能力與動態評量的影響。

貳、文獻探討

一、數感

數感是一種對數的直覺 (NCTM, 1989)，可以在各種情境下有意義的探究數字、連結概念，並與生活密切結合 (Sowder, 1988； Schoen, 1989)，自創策略有效解題 (Reys et al., 1999)，更能彈性思考與合理判斷 (Markovits, 1989； Reys et al., 1999)。認知心理學者認為數感一種較高層次的思考方式 (Resnick, 1989)，建構與推理的能力 (Greeno, 1991)，同時也是互相連結與統整的數學知識 (Marshall, 1989)。從數學其它領域之教育學者觀點，數感是一種彈性操作的心靈表徵，能在各種表徵之間互相轉換 (Behr, 1989)，並且著重數字的意義與彈性運算 (Carpenter, 1989； Silver, 1989)。

一些數學教育學者列出數感的主要特徵及構成要素 (NCTM, 1989； Sowder, 1992； Thompson & Rathmell, 1989； Resnick, 1989； McIntosh, B. Reys, & R. Reys, 1992)。綜合而言，數感包含以下六項能力：能了解數字的意義並能結合生活情境、能合成與分解數字以作為多種表徵之間的轉換、能了解數字的大小、能了解數字運算的結果、能使用基準點、能自創有效策略並判斷合理性。

有些學者認為數感的教學與評量非常不容易進行 (Sowder, 1992； Resnick, 1989)，但在國外已有許多數學教育工作者紛紛致力整合數感教學於課程中。學者們普遍認為數感的發展與提升，並不只靠一套教材就可達成，老師的角色與教學的情境才是重要的關鍵。老師如果能使數學有意義，並與生活緊密結合，多鼓勵學生由操作中建構數學知識，同時提供學生足夠的討論經驗，便能逐漸提升學生的數感 (Thornton & Tucker, 1989； Hope, 1989； Howden, 1989)。

數感的評量不容易進行，乃因數感的界定困難，且數感強調各種數學知識相互連結的程度，而目前評量仍偏重數學知識的個別發展。學者們認為要能有效評量數感能力，須靠連續的、動態的、彈性的、深入的、並且多元化的評量 (NCTM, 1987，引自 Howden, 1989； Sowder, 1992； Resnick, 1989； Ritchhart, 1994)。

從數感的相關研究可知，數感教學可以成功施於各個年級的學生、普通學生與特殊學生，教學方式可成功地以個別或團體進行，教學時間可成功地施以數星期到數

年，而教學課程亦可成功地從各種合理的角度設計（Vacc, 1995；Markovits et al., 1989；Markovits & Sowder, 1994；Trafton & Hartman, 1997；Hopkins, 1995；Stanger et al., 2000；支毅君，1997）。

二、動態評量

動態評量最主要的論點是俄國心理學家 Vygotsky 的社會認知發展理論，強調社會中介與內化兩個觀點，並提出「近側發展區」（zone of proximal development）的概念以評估學習潛能（莊麗娟，1996）。評量的歷程中，主張評量者與受試者的適度互動與協助，以檢視受試者的最佳表現。動態評量中的「動態」有二個涵義（吳國銘，洪碧霞，邱上貞，1995）：一是跨多個時間點，觀察受試者的進步及改變情形，即連續用「測驗－教學－測驗」程序。二是受試者與施測者有適量互動，是歷程、協助、診斷導向，可了解受試者的學習歷程與發展脈絡。特色是兼重學習結果與學習歷程，強調結合評量和教學。

綜合相關研究結果，動態評量對於數學教育各領域均有不錯效果（Jitendra & Kameenui, 1993, 引自莊麗娟，2000；Gerber, Semmel & Semmel, 1994, 引自莊麗娟，2000；Jitendra & Kameenui, 1996, 引自莊麗娟，2000；吳國銘、洪碧霞、邱上貞，1995；林素微，1996；陳進福，1997）。

參、研究方法

一、研究對象

本研究採取準實驗研究法，研究對象分為實驗組與對照組學生各一班。實驗組為第一研究者任教班級四年級的學生，共 37 人。同一學校同一學年之一個班級為控制組，教學者仍為原班級任老師，學生人數共 33 人。

二、研究設計

本研究先建立數感能力測驗試題，作為教學介入前、後數感能力的對照比較。再透過每單元二個主題的小組討論、每個單元連續 5 張平行的個人學習單與完成每張學習單後實施的班級討論活動，來探究學生數感能力之量與質的改變。

（一）「國小四年級數感能力測驗」試題的建立

流程如表 3-1 所示。測驗編製可分為試題編製、預試及正式施測三個階段。

表 3-1 數感能力測驗試題建立與施測的流程

	施測時間	樣本人數	目的
第一次預試	90 年 2 月	一個班級 (36 人)	修訂題目
第二次預試	90 年 3 月	一個班級 (35 人)	修訂題目
正式施測 1	90 年 4 月	九個班級 (322 人)	分析信度和效度
正式施測 2	90 年 5 月~6 月	二個班級 (70 人) (包含實驗組 37 人和控制組 33 人)	作為教學介入之前、後測

(二) 數感動態評量的設計

數感動態評量設計分為三部分：單元主題小組討論、個人學習單、學習單後續討論。表 3-2 則將數感動態評量之設計原則、實施與計分方法作一歸納整理：

表 3-2 數感動態評量之設計、實施與計分

動態評量設計	實施時間								活動性質	實施方法	計分方法
	第一週	第二週	第三週	第四週	第五週	第六週	第七週	第八週			
單元主題小組討論	1.分數的加減	1 次	1 次						教學介入	每單元 2 次，共 8 次。每週一次，每次依主題而實施時間不同 (40-120 分鐘)。	
	2.除法			1 次	1 次						
	3.小數的加減				1 次	1 次					
	4.統計圖表					1 次	1 次				
個人學習單	1.分數的加減	2 張	3 張						教學與評量交互進行之連續動態歷程	每單元 5 張，共 20 張。每週 2-3 次，每次約 20 分鐘。	每題 5 分，每張學習單依題數不同，總分亦不同。同單元的學習單題目平行。
	2.除法		2 張	3 張							
	3.小數的加減			2 張	3 張						
	4.統計圖表					2 張	3 張				
學習單後續討論	1.分數的加減	2 次	2 次						教學介入	學習單完成後，研究者批改發回，班級集體討論，每單元最後一張不討論。每單元 4 次，共 16 次，每次約 30 分鐘。	
	2.除法		2 次	2 次							
	3.小數的加減			2 次	2 次						
	4.統計圖表					2 次	2 次				

(三) 數感動態評量實施過程中的方案修正

本研究為行動研究，因此在動態評量活動中採用循環式的研究步驟。每個教學單元定為一個循環，有 4 個單元，因此有 4 個循環，每個循環均包含「擬定行動方案」→「研究團隊事前討論」→「行動方案實施」→「研究團隊事後討論」四個步驟，每

個循環最後的反省改進均為下一個循環的初始方案。為了形成較客觀的行動方案，因此組成一研究團隊，作為諮詢、討論的對象。

三、研究工具

(一)「國小四年級數感能力測驗」

為研究者自編，試題分六個向度：了解數字意義並能結合生活情境、合成與分解數字以作為多種表徵間的轉換、數字的大小、了解數字運算的結果、使用基準點、自創有效策略並判斷合理性。每個向度 6 題，共計 36 題。本測驗採取團體施測，一次一個班級，用於前、後測，實驗處 X 理時間為期 2 個月。為避免學生依賴紙筆計算，本測驗試題以 PowerPoint 在電腦上呈現，每題出現時間為 30 秒。每題一分，滿分 36 分。本測驗採內部一致性信度 Cronbach's α 係數，與內容效度、專家效度。內部一致性信度 Cronbach's α 值為 .72，平均難度為 .42。

(二)「單元主題小組討論」

為研究者自編，內容企圖使討論活動能密切連結數感的六個向度。單元主題小組討論配合研究期間課程教材的內容，進行 4 個教學單元，每個單元有 2 次的小組討論，每週進行一次，每次討論時間依主題內容不同而有差異。研究者採用異質分組，4-5 人一組。每次的討論均要求學生記錄，以作研究中質的分析來源。

(三)「個人學習單」

為研究者自編，是教學與評量交互進行之連續且動態的活動：個人完成學習單屬於評量活動，而班級一起討論學習單則為教學活動。藉由每單元連續 5 張平行學習單，可在量與質二方面呈現學生數學思考與解題策略的改變歷程。學習單的設計是針對不同單元，強化數感的各種特徵。每單元分別給予學生連續 5 張個人學習單，每週約 2 至 3 張，每次約 20 分鐘。為量化處理，每題均採用 5 分制。

(四)「學習單後續討論」

為研究群自編，學生完成每張學習單之後均要參與班級討論，此一活動是教學介入的一部份。每張學習單完成後，研究群收回批改，每題以 5 分制方式計分。待下一節數學課，利用 30 分鐘作班級討論，研究者並適時介入，引導學生思考策略。每單元有 5 張學習單，最後一張不討論，作為最後評量。

(五)學校第一、三次數學月考試題

爲了瞭解學生在接受數感動態評量實施後，除數感能力外，在校數學成績是否也受到影響，同時也避免可能是教學效益所導致的研究限制，因此以兩組在實驗處理前、後之的第一次、第三次月考數學成績作爲客觀對照。試題以課本爲範圍，命題者均非實驗組與控制組的數學老師，兩組月考試題一樣，滿分爲 100 分。

四、資料處理

本研究之資料包含二個部分：量的部分有兩班學生前、後測的數感分數，進行單因子共變數分析（ANCOVA），兩組第一、三次數學月考成績亦以單因子共變數分析進行，個人學習單量化的部分，進行成對樣本 T 檢定；質的部分有實驗組學生小組討論的錄影資料、學生的單元主題小組討論記錄表、研究群之小組討論記錄、學生個人連續數張的個人學習單、學習單後續討論記錄單。

肆、研究結果與討論

一、數感動態評量的效益

（一）實驗組的前測成績與後測成績比較

兩組學生前、後測平均數、標準差和相依樣本 t 考驗結果，如表 4-1 所示：

表 4-1 實驗組與控制組在「國小四年級數感能力測驗」
得分之平均數、標準差與 t 考驗摘要表

組別	人數	前測		後測		t	P
		平均數	標準差	平均數	標準差		
實驗組	37	12.22	4.36	16.22	5.31	-7.07	.000*
控制組	33	14.00	5.48	14.64	4.85	-.88	.384

*P<.05

由表 4-1 可知，實驗組前測成績低於控制組，後測成績卻高於控制組。以相依樣本 t 考驗來檢驗，控制組在前、後測無明顯差異，實驗組卻有顯著的進步。圖 4-1 和 4-2 顯示：控制組前、後測差異不明顯，實驗組後測成績明顯優於前測。

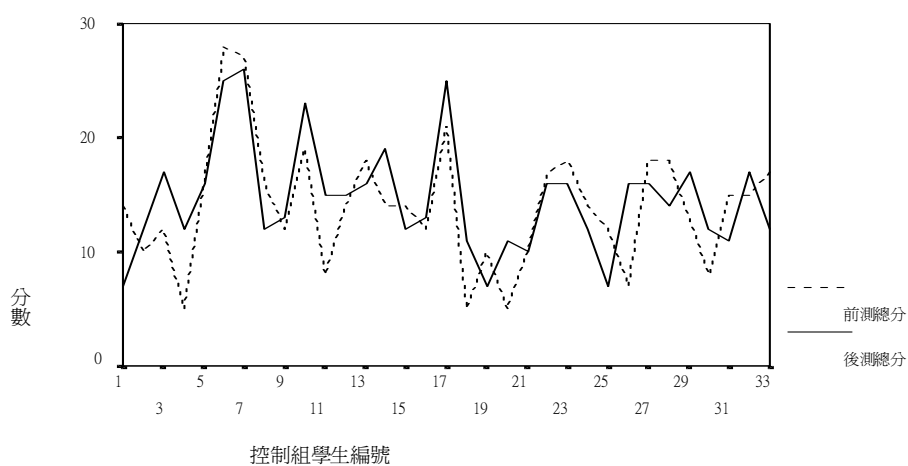


圖 4-1 控制組學生之前、後測成績比較圖

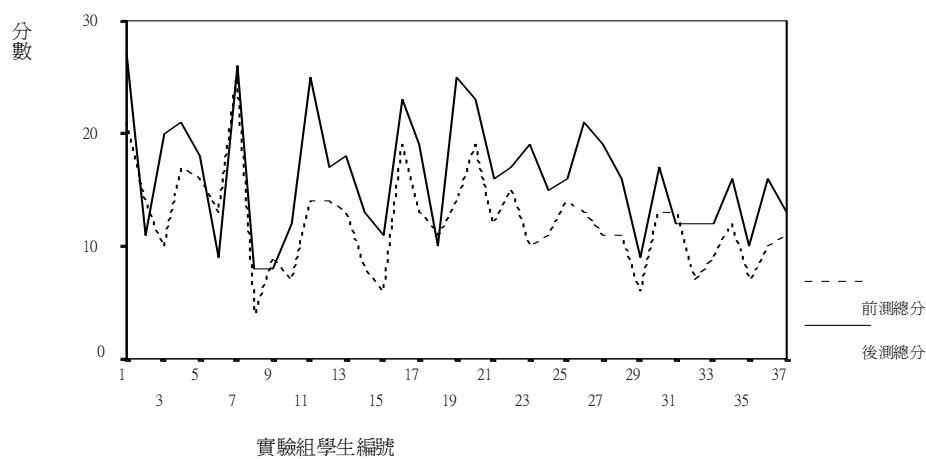


圖 4-2 實驗組學生之前、後測成績比較圖

(二) 實驗組與控制組後測成績的比較

以前測成績為共變數，後測成績為依變項，採單因子共變數分析來檢驗。先進行組內迴歸係數同質性考驗以決定是否適合進行共變數分析。如表 4-2 所示：

表 4-2 實驗組與控制組在「國小四年級數感能力測驗」
得分之組內迴歸係數同質性考驗摘要表

變異來源	離均差平方和	自由度	均方	F 值
組別	42.11	1	42.11	.07 n.s.
誤差	822.64	66	12.46	

表 4-2 顯示兩組學生之迴歸係數並無明顯差異，符合組內迴歸係數同質性之基本假定，於是進行後續的共變數分析。其結果如表 4-3 所示，表 4-4 為兩組學生在「國小四年級數感能力測驗」所得調整後平均數的比較：

表 4-3 實驗組與控制組在「國小四年級數感能力測驗」
得分之共變數分析摘要表

變異來源	離均差平方和	自由度	均方	F 值
共變項（前測）	901.16	1	901.16	69.82*
組別	141.94	1	141.94	11.00*
誤差	864.75	67	12.91	

*P<.05

表 4-4 實驗組與控制組在「國小四年級數感能力測驗」之調整後平均數

組別	人數	調整後平均數
實驗組	37	16.84
控制組	33	13.94

表 4-3 顯示，排除前測分數影響後，兩組學生分數有顯著的差異。表 4-1 與 4-4，顯示實驗組前、後測平均數不僅提升，調整後平均數亦高於控制組。

（三）實驗組與控制組兩次數學月考成績的比較

以第一次成績為共變數，第三次成績為依變項，採單因子共變數分析來檢驗。先進行組內迴歸係數同質性考驗，以決定是否適合進行共變數分析。組內迴歸係數同質性考驗的結果如表 4-5 所示：

表 4-5 實驗組與控制組在第一次、第三次數學月考得分
之組內迴歸係數同質性考驗摘要表

變異來源	離均差平方和	自由度	均方	F 值
------	--------	-----	----	-----

組別	14.03	1	14.03	.23 n.s.
誤差	623.08	66	9.44	

表 4-5 顯示兩組學生迴歸係數並無明顯差異，符合組內迴歸係數同質性基本假定，再進行共變數分析。結果如表 4-6，兩組學生確有顯著差異。表 4-7 為兩組學生所得調整後平均數比較，顯示實驗組調整後平均數高於控制組。

表 4-6 實驗組與控制組在第一次、第三次數學月考得分之共變數分析摘要表

變異來源	離均差平方和	自由度	均方	F 值
共變項	7047.96	1	7047.96	741.19*
組別	49.74	1	49.74	5.23*
誤差	637.11	67	9.51	

* $P < .05$

表 4-7 實驗組與控制組在第一次、第三次數學月考之調整後平均數

組別	人數	調整後平均數
實驗組	37	92.11
控制組	33	90.42

二、學生在數感動態評量過程中的改變

(一) 量的分析

進行相依樣本 t 考驗，檢驗每單元連續 5 張學習單分數間的改變，並分析每單元第一張到最後一張學習單的分數是否有顯著差異。結果如表 4-8：四個單元 5 張平行學習單都有程度不同的進步。圖 4-3 為平行學習單平均成績之剖面圖：

表 4-8 實驗組在每單元 5 張的平行學習單分數之相依樣本 t 考驗描述統計表

學習單	人數	平均數	標準差	t	P
分數的加減1-1		4.80	2.14		
分數的加減1-2		5.80	3.53	-1.75	.088
分數的加減1-3	37	10.62	4.37	-8.20	.000*
分數的加減1-4		13.62	3.83	-5.16	.000*
分數的加減1-5		14.27	3.81	-1.55	.131
除法2-1		7.35	4.00		
除法2-2	37	10.50	4.64	-4.81	.000*
除法2-3		14.16	5.03	-5.69	.000*

除法2-4		14.27	5.22	-.17	.868
除法2-5		16.46	4.23	-4.11	.000*
小數的加減3-1		9.32	3.50		
小數的加減3-2		10.23	3.68	-2.45	.019*
小數的加減3-3	37	12.19	3.36	-4.82	.000*
小數的加減3-4		11.58	3.13	1.46	.153
小數的加減3-5		13.68	2.70	-5.57	.000*
統計圖表4-1		5.84	3.00		
統計圖表4-2		8.10	3.81	-4.92	.000*
統計圖表4-3	37	12.14	5.24	-7.70	.000*
統計圖表4-4		13.24	5.11	-2.52	.017*
統計圖表4-5		14.72	3.47	-2.53	.016*

*P<.05

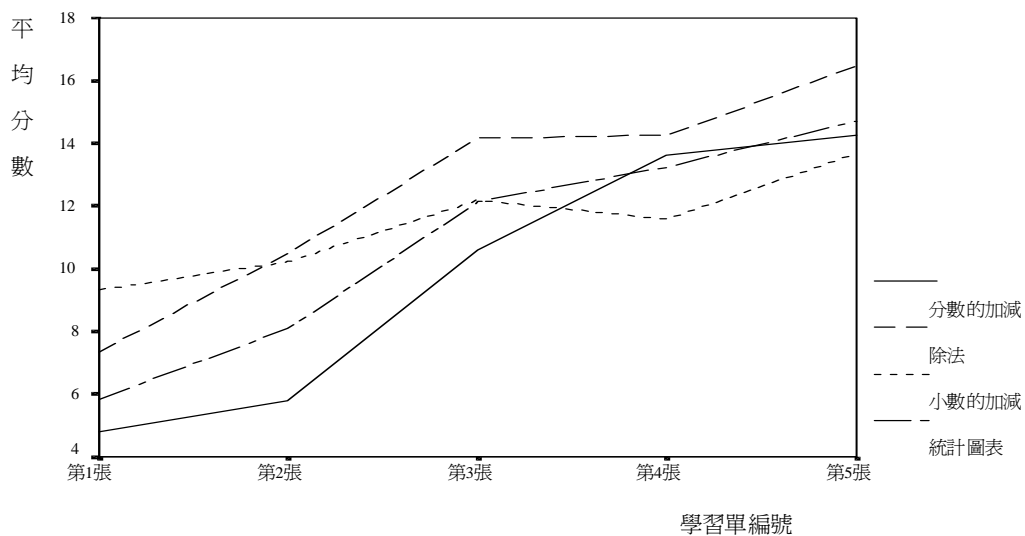


圖 4-3 實驗組學生每單元連續 5 張平行學習單成績得分剖面圖

圖 4-3 可看出實驗組在 4 個單元中，學生幾乎每個單元都有不同程度的進步。由線條的傾斜角度觀之，亦可看出的學生進步的速率。從上升斜率來看，雖然「小數的加減」單元進步速度比起其它單元緩慢，卻也是穩定成長。若進一步對照表 4-5，標準差愈來愈小，表示學生在此單元的差異愈來愈小，分數愈來愈接近。

為更瞭解數感動態評量影響數感能力的程度，故進行相依樣本 t 考驗。表 4-9 和

4-10 為每單元 5 張平行學習單分數的相依樣本 t 考驗之相關係數與考驗結果：

表 4-9 實驗組在每單元 5 張的平行學習單分數之相依樣本 t 考驗相關係數表

學習單	人數	相關	顯著性
分數的加減1-1和1-5	37	.42	.009*
除法2-1和2-5	37	.33	.045*
小數的加減3-1和3-5	37	.66	.000*
統計圖表4-1和4-5	37	.63	.000*

表 4-10 實驗組在每單元 5 張的平行學習單分數之相依樣本 t 考驗

學習單	成對變數差異		t	自由度	顯著性
	平均數	標準差			
分數的加減1-5和1-1	9.47	3.49	16.50	36	.000*
除法2-5和2-1	9.11	4.76	11.65	36	.000*
小數的加減3-5和3-1	4.35	2.66	9.95	36	.000*
統計圖表4-5和4-1	8.88	2.81	19.22	36	.000*

*P<.05

由表 4-9 可知，實驗組在每個單元的第 1 張與最後 1 張學習單分數均有顯著相關。由表 4-10 的平均數可看出，每單元最後一張學習單分數比第一張為優。更進一步檢驗其進步程度，從表 4-7 顯示，實驗組每單元從第 1 張到第 5 張學習單的進步情形，經過相依樣本 t 檢定後，考驗結果已達顯著。

(二) 質的分析

1. 「分數的加減」單元：

(1) 「個人學習單」與「學習單後續討論」方面的改變：

本單元每張學習單均以第一張學習單舉例如下：

1. 元太的數學程度不太好，柯南想用很多不同的方法來教會他。如果你是柯南，你會如何教

這一題 $1\frac{7}{10} + 3\frac{5}{10} - 2\frac{9}{10} = ?$ 請盡量想出各種方法！

在第 1 張學習單中，學生分解、合成數字的方法比較單一、制式，有超過一半的學生往往只呈現一種方法：前二項加減完再和第三項作加減，或是整數加減整數、分數加減分數。但經過多次學習單後續討論，藉由同儕間多種不同策略的分享與刺激，

目的多寡」來作區分。透過多次討論，同儕之間解題策略的刺激，研究者提問以引導學生思考（例如：如果 $1/10 + 2/10$ 是簡單的題目，怎樣的題目可能會比較難一點？為什麼會比較難？如果照這個理由，更難的題目可能是？），到了後面幾張學習單的評量，學生不僅愈來愈能清楚說明區分的理由，甚至連區分程度的三題也有不同而多元的層次與類型，學生已能從各種角度思考，並呈現多元的策略。

5. 還可以出不同類型的嗎？

一開始學生幾乎重複上一類型，不清楚「不同類型」的意義。經過多次的後續討論，同儕之間呈現並分享不同解法，研究者延續上一題的提問並刺激學生思考，在後面的學習單評量過程中，學生的策略變得比較多元，可以寫出各種類型的題目來區分三種程度，並能判斷這些區分方法的可行性，例如：以「真分數、假分數、帶分數」、「分母的異同」、「進位與否」、文字題「條件給予的直接或間接」、「解題的難易」等多種角度來思考。

在「分數的加減」單元 4 次的後續討論中，學生討論歷程有很大的轉變。一開始討論態度被動消極，討論內容貧乏粗淺，常需研究者從旁引導。後來幾次的討論，學生逐漸感受到討論環境安全而有趣，因此參與討論的情況愈加主動而踴躍。最重要的是，學生已經知道如何進行討論才能有實質收穫，並且討論時能針對主題，嘗試向同儕澄清分數概念與解題策略。

(2)「單元主題小組討論」方面的改變：

A. 「超級分數偵探」：

這個活動是先藉由研究者事先準備的幾個提示，讓學生以小組討論的方式猜出研究者的答案。猜完後，各組需討論猜測過程中，哪一個提示最有幫助，哪一個提示最沒有用處。各組討論完後上台發表，除了需記錄別組的想法外，也要說出欣賞哪幾組的想法及理由。接著討論並分享猜一個答案最少需要多少提示。最後，每組都要設計一些提示，和別組交換解題，再記下討論心得。

在本活動中，約有一半學生一開始是隨機亂猜，但藉由同儕討論，互相分享策略、修正想法，大部分學生逐漸可以掌握猜測答案的技巧。自己設計題目並與別人交換解題，顯得有趣並極具挑戰，但因出題經驗不夠，第一次出題時很多組都出了不適合的提示，例如：沒有用的或與其它提示類似。透過各組觀摩學習，加上研究者暗示或引

導（例如：提示一是分母是偶數，提示二是分母是 2 的倍數，去掉其中一個提示，你覺得還猜得出來嗎？），之後的出題幾乎每一組都很成功。學生對數學的興趣比開始時高，討論技巧和互動情形也有很大的進步，並能依照提示有系統地猜測答案。

B. 「奇妙的組合」：

先讓學生討論 6 枝箭射在分子是奇數的分數靶上，是否可以得到分子是奇數或偶數的總分，小組討論完上台分享，並記下認為最棒的解法和原因。其次，討論 6 支箭換成 5 支箭時情況是否改變，判斷的方法是否相同，再討論靶上分數之分子由奇數改成偶數時是否一樣，總分有沒有限制。最後記下討論心得。

剛開始學生覺得一直計算分數的加減很煩，研究者引導學生觀察並反思計算的過程，有學生發現不必每個都算，只要找出奇數與偶數加減的規則就可以。當學生找到解題關鍵後，研究者馬上給予強化，因此幾乎都能應付條件改變後的情況（例如：6 支箭改成 5 支箭，學生能清楚說出 5 是奇數，不可能得到 $\frac{8}{25}$ 、 $\frac{12}{25}$ 、 $\frac{28}{25}$ 、 $\frac{56}{25}$ 的總分）。這個活動使學生在分數加減概念上有了進步，同時也引導學生找出規則，作合理判斷，並能彈性應用規則於不同情境中。

2. 「除法」單元：

(1) 「個人學習單」與「學習單後續討論」方面的改變：

本單元題型以第一張學習單舉例如下：

1. 生活中什麼時候你會用到除法？請盡量列出。

學生開始時大多只列出一種除法情境，經過小組討論與分享策略，研究者並從旁引導和提問以不同角度思考（例如：除了分東西、分組外，在學校或家裡做什麼你可能會用到平均分配？做什麼可能也會用到幾個一組？），在後續學習單評量中，學生的答案多元且有創意（例如：畫圖時量長度、算月考平均分數、當小老師出題目時各大題的配分、各國錢幣的換算、不同時間單位的換算等），顯示出學生已經把除法和自己真實的生活情境作連結。

2. 估計 $4936 \div 48$ 大約是（ ）。估計方法：
估計 $7146 \div 23$ 大約是（ ）。估計方法：

分成二小題，第一題有明顯的數字作估計基準點，第二題數字則不明顯，用意是希望學生能對數字有敏銳感覺，作合理判斷，並運用自創的策略估計。

開始時學生拘泥於「愈精準愈好」的框架中，估計時不敢放心大膽使用彈性策略，

以致失去估計的真正意義。經過數次的評量後，學生很有信心地運用策略並作合理判斷，同時兼顧合理性與方便性，雖然可能較不精確，但也能接受合理範圍內的誤差，並以不同數字情境來作判斷的標準。

以第一題來說，剛開始學生的估計只求接近原來數字而不管是否方便，學生無法判斷概數需求至哪一位。經過多張的學習單討論與呈現學生多元解法，研究者並以提問引導學生提高對數字的敏感程度（如果不想拿筆計算 4936 和 48 ，又想方便算出大約的數，你覺得可以怎樣算？如果 4936 看成 4900 可以嗎？看成 4900 時，除以 48 好除嗎？要如何修正？這樣的修正合理嗎？為什麼？），激發學生思考及討論，之後幾張學習單評量，學生不僅能運用方便的基準點來估計（例如：把 $1487 \div 15$ 轉成 $1500 \div 15$ ），並對數字有更敏銳的感覺（例如：看到 $3419 \div 33$ 可以很有信心地轉成 $3300 \div 33$ 或 $3400 \div 34$ ）。

以第二題來看，開始時學生不能馬上找出適合概數，有很多學生乾脆精確計算完再取概數（例如：先算出 $7146 \div 23 = 311$ ，因此估計約為 310 ）。也有學生仍先取接近的概數，而不考慮是否方便估計（例如：把 $7146 \div 23$ 轉換成 $7200 \div 23$ ）。同樣在經過多張的學習單討論，研究者引導學生思考後（如果只要大約的答案，需不需要有很難或不方便的計算？如何才能使計算方便？比較被除數和除數這兩個數字，有沒有怎樣的想想法？），學生不僅對數字敏感，可找出適當數字作估計，並愈能兼顧估計的方便性，更重要的是，學生學會在不同的數字情境下，彈性採用不同的解題策略。

3. $399 \div 21 = ?$ 有多少方法可以求出答案？請列出。

剛開始時，幾乎所有學生只列出最熟悉的一種方法，例如：用除法直式計算。經過幾次的學習單討論，互相分享不同的做法，研究者並適時介入（例如：如果你沒有學過除法，你想怎麼做？如果你不一定拿筆計算，你會怎麼做？為什麼？優點是什麼？缺點呢？），到了後面幾張學習單，學生的解法顯得多元而靈活，例如：連加法、連減法、畫○、以實物操作解題，甚至有學生頗有創意地建議使用計算機，不僅符合生活經驗，亦能彈性運用工具解題。

4. 已經知道 $891 \div 27 = 33$ ，則 $\square \div 28 = 33$ ， \square 應該是 $891 (+ - \times \div)$ 【 】。（圈出正確的運算符號）

一開始學生遇到這種非制式的題目時，半數以上幾乎空白，少數則亂猜。學生不能瞭解兩個算式之間的相關，也無法看出數字的合成、分解策略。因此，對於習慣直

接求取答案的學生而言，這個不需紙筆計算的題目反而困難。經過多次討論，研究者從旁提示（例如：前面兩個算式有什麼關係？你覺得除數多 1，被除數應該要多還是少多少才會有一樣的答案？為什麼？），後續幾張學習單，學生學會對照兩算式以作判斷，不再依靠紙筆。學生在此類題中的進步是：不再只靠計算求答案，學會仔細觀察算式，以舊有經驗、知識對數字合成與分解作合理判斷，並能清楚運算前後的數字作如何改變。

5.100 個和尚總共吃了 100 個饅頭，每個大和尚吃 3 個饅頭，3 個小和尚合吃 1 個饅頭。請問大和尚和小和尚各有幾人？

一開始學生幾乎全部放棄不作。只有 2 位學生嘗試錯誤，進行一半。透過全班討論解題策略，研究者要學生嘗試用畫圖或其他可能比較慢、卻比較容易理解的方法，再全班討論是否合理或可行。在後續幾張學習單的評量過程中，學生已經可以純熟運用適當的解法解題（例如：畫○慢慢整理、一個一個條列出來），這些方法並非最經濟有效，卻是學生自行發展出的策略。尤其到第 5 張學習單，大部分學生在互動討論與自我學習的歷程中，找出適合自己的思考模式與方法。例如：在前幾次的後續討論時，有一位程度好的學生提出如下解法「 $1+4=5$ ， $100\div5=20$ ， $20\times4=80$ 」時，大多數學生雖然知道此法快速簡單，但因還不能真正理解意義而無法認同，因此前半段使用此法的學生不多，或是想嘗試使用卻因不懂而錯誤百出。但在一次又一次的後續討論中，此種策略不斷出現，並一直有機會受到澄清與討論，學生在潛移默化中逐漸能夠瞭解意義，並能在內化後變成自己的策略開始使用。在此類題中，學生學會面對非例行性問題時，如何自創並運用適當的策略解題，同時也學會吸收別人方法的優點，逐漸內化成自己的策略。

剛開始進行後續討論時，一半以上學生對於解題策略有很制式的想法，認為解法應該有一套正式、標準的做法。經過幾次的討論，研究者協助學生之間互相辨證、澄清後，學生對解題策略的觀念有了改變。他們能接受不同的方法有不同的優點，可以用於不同的情境，而不是最快方法才是最好方法。

(2)「單元主題小組討論」方面的改變：

A.「向空格挑戰」：

在這個活動中，分別讓學生解出加、減、乘、除的 4 題空格題目，討論求最大或最小答案之思考方式是否相同，各組討論完上台發表，並記下最欣賞的做法與理由。

最後仍記錄自己的心得。

在討論的過程中，學生一開始不知如何著手，只好一直嘗試錯誤。藉由學生間的討論、辨證，研究者的提示引導，到最後學生已經能掌握要領（例如：把大的數字都放在左邊能得到最大和： $754+972$ ）。只是題目似乎對他們較難，學生的討論速度很緩慢，到最後有一點不耐煩。當他們發現不同的數字可以有相同的結果時（例如：抽出 2、4、5、7、7、9，可以排出 $754+972$ 或 $772+954$ 或 $974+752$ 最大和），有一點訝異，之後的嘗試似乎就比較多元而豐富，並能接受不同解法。此活動中，學生嘗試錯誤的經驗逐漸累積，不再尋求一定解法或唯一答案，並能欣賞、學習不同的解題策略與思考方式。

B. 「超勺一尤、的減肥菜單」：

這個活動列出了三個表：一是運動熱量消耗表，一是食物熱量表，另一是體重表。藉由這些資訊，學生要計算出同一運動，誰的消耗量多；誰運動多久才能消耗相同熱量；吃哪些東西可以藉著做多久的某項運動把熱量消耗光。同時，要各組學生設計一份 1000 卡的菜單。之後每組根據已給的三個表格出題並交換解題。另外要學生再設計一份屬於自己的午餐菜單，並配合選擇的運動與時數將熱量消耗完。最後仍記下這次的討論心得。

這個活動很能引起學生興趣，但初始時學生菜單設計得很離譜。經過多次小組討論，研究者提出錯誤例子討論，學生已能作適當選擇（例如：午餐吃了 2 碗麵線，荷包蛋 2 個，雞腿二片，炸蝦二份，豆腐一份，青菜一份，芒果一個，哈密瓜二片，蘋果一個，就須跳繩 4 個小時才能消耗完熱量），並能藉此證明數字在生活中的實用性。這次活動，學生不僅強化除法概念，同時比較能關心數學在生活中的運用，而不再只是教室中的數字計算。

3. 「小數的加減」單元：

(1) 「個人學習單」與「學習單後續討論」方面的改變：

本單元題型以第一張學習單舉例如下：

1. 這裡有一個算式 $8.5+1.25$ ，若此算式是要解決日常生活中的問題，你認為可能是哪些情況？請盡量列出。

剛開始學生只列出一、二種，其中有一半是不合常理的，例如：人數相加（有「小數」個人嗎？）。另有三分之一是不符合活經驗的，例如：糖果顆數相加。在幾次的

學習單後續討論中，學生利用社會建構，不斷的進行澄清、辯證、溝通，研究者亦不斷連結舊有經驗（例如：生活中有些地方不可能看到小數，在哪裡？生活中用得到小數的是什麼時候？用什麼單位比較好？為什麼？在這種情況下會有相加的情況嗎？什麼時候？合理嗎？常見嗎？）。後面幾張學習單，學生展現多種變化與創意，並能嚴謹考慮小數在生活中的意義。例如：敏銳察覺出小數 80.5 和 100.25 可能適合美金的換算，0.5 公尺和 1.25 公尺較適合跳高的高度相加。學生在本類題中的明顯改變，是答案從不合常理、單一例子，轉變為瞭解小數意義，考慮生活經驗，能呈現多元有創意的情境。

2. 想用計算機計算以下的算式，卻發現 $\boxed{6}$ 的按鍵壞掉了。請問你會如何按才能求出答案？
 $\boxed{6}2.06 + 16.72 - 8.66 - 6.69 = ?$

一半學生在剛開始作數字調整增減工作時常會出錯。例如：中間過程總有一個鍵忘記避開 $\boxed{6}$ 。又如：「 -8.66 」若拆成「 $-8.55 - 0.11$ 」，學生總是直覺寫成「 $-8.55 + 0.11$ 」。有學生先把原始數字全部調整過後，例如：「 $52.05 + 15.72 - 8.55 - 5.59$ 」，再一起增減，「 $+10.01 + 1 - 0.11 - 1.1$ 」，這種按鍵方式爲了避免忘記，實際生活中只能依賴紙筆記錄。但在幾次的後續討論後，學生們提出自己的解法互相觀摩學習，研究者引導學生思考每一種解法的優缺點、適用的情境，因此接下來的幾張學習單，學生能運用簡單正確的策略避開某一按鍵，並且錯誤明顯減少，顯示學生能熟練運用已經內化的解題策略。學生在本類題中能作有效的數字分解與合成，運用簡單方便的策略對數字運算作彈性調整。

3. 題目	我的估計	計算機計算的結果	檢查估計值是否合理
例： $\begin{array}{r} 1.95 \\ 3.04 \\ +12.07 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \\ 3 \\ +12 \\ \hline 17 \end{array}$	17.06	合理
$\begin{array}{r} 8.09 \\ 0.97 \\ 2.1 \\ +23.89 \\ \hline \end{array}$			
$\begin{array}{r} 15.1 \\ - 8.93 \\ \hline \end{array}$			
$\begin{array}{r} 124.92 \\ - 6.99 \\ \hline \end{array}$			

剛開始一半學生不知道取概數就是取一個接近數的意義，認為去掉小數位數就是最接近的數（例如：23.89 取概數為 23）。在判斷估計值是否合理方面，學生認為「合理」就是「精準」，因此出現在比較 118 和 117.93 時認為「不合理」的情況。學生透過幾次討論的澄清與辯證，研究者並協助學生建立正確概念，學生在後面幾張的學習單中，已經能夠有效取得概數估計，同時也能適當的衡量尺度，作一合理判斷。

4. 請從 7 個數字中，選擇最適合的填入【 】中。	
1104	冰島這個國家的人口多半集中於都市，其中首都的人口就達【 】人左右，大約佔了全國人口的【 】。冰島的氣候並不是像名字一樣那麼冷，一月平均氣溫是攝氏零下【 】度，十月的平均氣溫是攝氏【 】度。冰島最有名的是火山。許多火山中，最常爆發的是赫克拉火山，它自西元【 】年以來就已經爆發了【 】次，平均大約每隔【 】年爆發一次。
0.4	
$\frac{1}{2}$	
70	
100000	
11.2	
10	

一開始有一半學生對數字的感覺不夠敏銳，也無法和生活經驗作連結，例如：出現「西元 100000 年」、「爆發 $\frac{1}{2}$ 次」、「人口達 0.4 人」的離譜情況，顯然學生對數字大小並沒有真正理解，且無法依生活經驗作合理判斷。經過幾次的討論與研究者給予的提問（例如：小數不可能出現在哪裡？分數不可能在哪裡？為什麼？大數最可能出現在哪裡？為什麼？有兩個小數，你覺得他們應該怎麼放？），之後的各張學習單，不論是整數、分數或小數，甚至連學生較無實際經驗的「大數」，都能對數字大小有更深入瞭解，並依經驗作一合理判斷。

後續討論中，透過一次又一次的同儕溝通與辯證，研究者從旁引導或澄清，學生由單一思考進步到不同角度的考慮，同時也逐漸對數字有敏銳感覺。

(2)「單元主題小組討論」方面的改變：

A.「創意的運算」：

本活動設計了幾題小數加減混合算式，每個式子都有一至數個空格，可能是數字或運算符號，分別讓學生估計答案，各組討論估計方法並分享，再實際計算答案，並判斷估計值是否合理，或討論最大、最小的可能性。之後進行各組出題並交換解題，同時記錄討論的心得。

在開始時，一半學生對於式子中含有二個未知數的問題束手無策，經過幾次的練習，各組互相觀摩討論，研究者並引導學生觀察算式中相互關係，學生逐漸可以探討

各種可能性，例如：針對題目 $\square + 3.1 - \square - 5.6 = 8.7$ ，學生在嘗試錯誤過程中，不僅知道有許多組可能答案，同時也能找到兩個 \square 互相影響的關係。例如：題目 $8.1 \square 2.5 \square 1.2 \square 4.6 = 7.2$ ， \square 欲填入「+」或「-」，有的小朋友利用 3 種方法反覆驗證：先嘗試錯誤；再試著取概數估計： $8 \square 2.5 \square 1 \square 4.5 = 7$ ，以此判斷應是 $8 + 2.5 + 1 - 4.5 = 7$ ；最後利用每個數字的小數位作簡單加減來驗算 $1 + 5 + 2 - 6 = 2$ 。學生在此活動中，不僅加強小數的概念，也運用各種不同方法解題，更重要的是，學生不再固守單一標準答案，能尋求各種可能。

B. 「魔幻工程師」：

研究者準備好寫上不同小數的籤 9 張，請各組抽籤，並告訴學生白色積木、橘色積木、百格板、千格板在此活動中各代表百分位、十分位、個位和十位。每組根據抽出的小數，用桌上積木排出。各組輪流到其它組桌上觀察積木，並討論適當估計方法，記錄後，再輪流到各組討論實際數積木的有效方法，並實際數數看積木個數，記錄下來以作估計值與實際值的比較。各組分享方法並寫下認為最佳方法及理由。最後把九組所有積木堆在一起，每一組先討論、估計並實際數數看積木數量，並比較哪一組的方法最有用。學生紀錄討論心得。

這個動手操作的活動，一開始即吸引學生的注意。一半學生起初估計積木的能力並不好，但在研究者引導學生在遊戲中大膽嘗試及之後的討論活動中，學生逐漸找出最佳的估計方法，例如：有的組別分派組員估計各類積木數量，再一起算出積木總和；有的組別要每個組員都作整體估計，再刪去極端數求出平均值。在這活動中，可看出實際操作不僅提高學習興趣，且學生不知不覺培養基本量感，並能學習找出系統方法來估計、點數積木。

4. 「統計圖表」單元：

(1) 「個人學習單」與「學習單後續討論」方面的改變：

本單元題型以第一張學習單舉例如下：

1. 這可能是調查什麼的長條圖？	
運動	
玩電腦	
看電視	
閱讀	
聽音樂	

剛開始學生都不能完整的寫出這個長條圖所代表的情境，有學生甚至寫出不適當的情況（例如：某人的興趣調查）。經過小組分享與討論，研究者引導提問（例如：你看到哪些項目？有關聯嗎？可能調查的對象是一個人或很多人？為什麼？），學生大部份能明確且完整地判斷與表達，例如：「高雄一年溫度的變化」、「全班喜愛卡通人物統計圖」。甚至有些學生的答案頗富創意，例如：「他們（少年偵探隊）五人的破案記錄」。在本類題中學生最明顯的進步，是依情境作合理判斷，並能明確、完整地表達。

2. 你會把以上這些資料用在：

第一張學習單中，學生似乎無法掌握資料的實際用途，有一半以上只是再陳述一次標題。經過全班的澄清與討論，研究者適時引導和提問（例如：你為什麼要調查這個？有沒有別的方法也可以找到這個資料？這個方法最好嗎？為什麼？），後續的數張學習單評量歷程中，學生逐漸能清楚表達資料的主要用途，例如：記錄每個月的體重變化是爲了「檢查減肥計畫是否成功」、票選最受歡迎的卡通人物是爲了「決定廣告中的主角是誰」。在本類題中，學生已能結合自己的生活經驗，並根據給予的資訊作合理判斷。

3. 請你幫此圖補上缺少的部分。

第一張的學習單中，學生的圖幾乎都不夠完整，例如：少了標題、少了單位、少了縱軸或橫軸的項目名稱。甚至出現不合理的情況，例如：調查樣本是全班人數，卻出現所有長條代表的人數相加超過 10000 人。透過呈現各種答案，全班共同討論，研究者補充或修正不足之處，接續幾張學習單，學生愈能完整補全缺少的部分，愈能充分判斷是否合理，同時也不再出現違背常理的情境。

4. 你會如何描述以上這個圖？

在第一張學習單中，有一半學生只列出一項較明顯或表面的特徵，例如：「看電視最高票」。學生透過互相觀摩，研究者協助學生從不同角度觀察並探究，之後學生不僅可以找出許多特徵，且有些特徵非直接可得，必須深入探究或經過多層轉換才能得到，例如：「步美的錢是元太的 3 倍」、「人數沒有超過 50 人」等。學生在此類題中能根據資訊找出特徵與規則，並作有效的數學溝通。

5. 若不用長條圖，你會用什麼方式呈現這些資料？

開始時學生不管題目適不適合，總是長條圖轉折線圖，折線圖換長條圖，似乎不清楚這兩種間差別與用途。經過幾次後續討論，藉由學生之間的澄清與建構，研究者的提問以引導（例如：你曾經看過不一樣的表達法嗎？這些表示法在這裡都適用嗎？為什麼？），學生不僅表達資訊呈現多樣方式（例如：整理成統計表格、用圓形圖呈現、以正字記號表示），且能判斷什麼時候長條圖與折線圖均可表達，什麼時候不太適合。

(2)「單元主題小組討論」方面的改變：

A.「驚人的呼吸」：

這個活動先從日常生活切入，再引入「呼吸」為討論主題。先要各組學生估計每小時的呼吸次數，嘗試描述九組的估計數字，並要學生畫出各組估計值的統計圖。接著引導學生思考並計算真正呼吸次數，各組討論計算出來的值和真正呼吸次數有沒有差異，並說出原因。討論什麼方法可以判斷估計值是否合理，並實際動手加以驗證。各組分享彼此解題策略後，記錄最欣賞的方法及理由。最後希望全部學生能感覺一下「大數」到底有多大，因此以紙條來表示一天的呼吸次數，每 1mm 當作一次呼吸，藉由接起來的長紙條感受驚人的「大數」。結束時仍記錄討論心得。

一開始學生很有耐心地接長紙條，但紙條似乎接也接不完時，學生就愈覺煩躁。各組學生藉由互相溝通與建構，研究者引導學生討論較好的方法，最後終於成功接完後，每一個人都不敢置信，每天的呼吸次數竟可這麼長！因此雖然接長紙條很花時間，但是藉由動手操作並親自驗證，學生對感覺「大數」的大小有了很深刻的經驗。這個活動中，學生先學會整理生活中的資訊成統計圖，根據真實情況作合理估計及推測，並能從操作中得到「大數」的感覺。

B.「猜測高手」：

研究者先在心中想好一個三位數，各組輪流猜。每猜一次，研究者就在事先準備好的「另類長條圖」中畫上提示。另類長條圖，就是猜對百位、十位、或三位均猜中者就在每欄格子上塗滿代表猜對的組數。例如有兩組猜對百位，就在百位那一欄塗滿兩格。各組必須根據畫出的提示作判斷，以修正所猜的數字。研究者再針對每組修正後的數字給予第二次的提示。之後要求學生決定真正答案，並陳述理由，各組分享後再記錄最欣賞的方法。活動結束前寫下心得。

剛開始玩這個遊戲時，幾乎每個學生都不太能適應，因為以往考試估計數值愈接近真確數字愈好，但此活動卻強調猜中的位數。研究者在設計此活動時，並不是希望藉此訓練學生的估計能力，而是希望學生能藉由得到的資訊作出合理判斷，並學習如何修正先前答案。隨著活動的進行，學生的討論也愈來愈深入，研究者並視情況給予學生肯定與澄清，學生在活動過程中愈能抓住蒐集資料、合理判斷的精髓，因此一半以上學生能快速調整觀念、並能彈性應對。

三、行動研究中的教師專業成長

（一）第一個循環「分數的加減」

在這個循環中，研究者獲得許多珍貴收穫。第一個是時間不足的問題，研究者從這個方案修正過程中，瞭解預估討論所花費的時間其實常常會太過理想化，若能在預估時間外加一些彈性，也不至於因一個活動而影響到整個計畫；第二是學習單量化標準的問題，研究者從此方案中體會有些題目要加以量化很難完全客觀，如何取捨是一門大學問，依賴的是專業素養和判斷。第三是學生對學習單不夠投入，提醒研究者注意學生的動機。提高學生討論的動機有時是要抓住學生的注意、滿足學生的成就感，例如讓他覺得自己很棒，或讓他覺得討論是很有趣的。

（二）第二個循環「除法」

在這個循環中，研究者學到了一個新概念。當討論呈現冷清或停滯時，教師通常都知道要想辦法引導學生，讓討論可以繼續進行。但是在這次的方案修正過程中，研究者從研究團隊學到教師也必須維持熱絡討論的熱度。當學生討論得欲罷不能時，最容易激發出各種不同的創意和想法，如果任其冷卻或消失，就一去不回，無法及時捕捉。因此熱絡討論氣氛很重要，保持討論的高溫也很重要。

（三）第三個循環「小數的加減」

研究者本來希望實驗組和對照組的教學時數盡量維持一致，對照兩組的教學效益時可以控制教學時間的變因。但礙於學校進度與實驗處理無法兼顧，兩相權衡下，爲了學生的學習效果只好增加學習時數，放棄時間變因的控制。雖然覺得影響了研究設計，但還是認爲應該以學生的學習爲考慮前提。

(四) 第四個循環「統計圖表」

在這個循環中，研究者驚覺很多教學活動的設計是必須老師親自動手操作的。老師都知道讓學生從操作中可以學到並強化許多概念，甚至解決問題。但卻很少想過教學前老師操作的重要性。老師可以先感受一下學生的初始經驗，並從中發現問題、解決問題。藉此使教學活動的進行更順利、更有效，達成學習目標。

四、數感動態評量融入數學科教學的限制

本研究進行爲期 2 個月的數感動態評量，雖然結果顯示在質與量兩方面均有顯著效果，但數感強調的是數學思考與知識內化的能力，要在短期教學與評量中明顯提升學生的數感能力，似乎不容易。本研究中學生數感能力之所以進步如此顯著，研究者認爲可能因爲：作爲前、後測的「四年級數感能力測驗」與動態評量過程中的教學與評量，爲強化並檢測學生的數感能力，均以數感六向度來設計，因此實驗結果有可能是教學效益所致，推論上難免有其限制。若能長期融入數學教學，也許更能客觀分析其對學生的影響，真正改進教學與評量上的缺失。

伍、結論與建議

一、結論

(一) 數感動態評量的效益

1. 實驗組的後測成績明顯高於前測成績。
2. 實驗組後測成績明顯優於控制組後測成績。
3. 實驗組兩次數學月考成績明顯優於控制組兩次月考成績。

(二) 學生在數感動態評量過程中數感能力的改變

1. 量的分析方面，每單元個人學習單成績有明顯進步。
2. 質的分析方面，學生的概念愈加強化，思考愈加多元，策略愈加靈活。

(三) 行動研究中的教師專業成長

- 1.活動的預估時間必須彈性計畫，才不致影響整個活動流程。
- 2.學習單量化的標準要依賴專業素養，盡量求得客觀。
- 3.提高學生討論的動機在活動中很重要，甚至影響教學的進行。
- 4.當討論呈現冷清或停滯時，教師要適時引導學生；當學生討論得欲罷不能時，老師要保持討論的熱烈氣氛。
- 6.任何活動的設計與進行，均以學生最佳學習利益為主。
- 7.教學活動的設計老師必須先動手操作。

(四) 數感動態評量融入數學科教學的限制

「四年級數感能力測驗」與動態評量均依據數感六向度來設計，可能導致教學效益，有推論上的限制。

二、建議

(一) 教學方面的建議：

- 1.生活中許多活動或資訊都可作為訓練學生數感能力的材料與教學活動。
- 2.老師在設計教學活動時，要多提供學生小組討論的機會。
- 3.對於低、中程度的學生，老師應常給予具體物操作的機會，讓學生能從中建構並內化概念，讓學生在生活情境中，不知不覺培養數感能力。
- 4.老師在課堂上不應只要求標準答案，要多讓學生有多元思考，並常要求學生在生活中與課堂上使用估計策略作合理判斷。
- 5.老師應尋求支援，不應單打獨鬥，多和同事或朋友討論，才能集思廣益，找到最適合的教學策略。

(二) 對評量方面的建議：

- 1.數學的評量不再侷限於靜態的紙筆評量。
- 2.在評量中，要多提供學生動手操作的機會，並重視學習過程而非學習結果，這樣學生的基本數學能力才會逐漸養成。
- 3.老師應嘗試多元評量，多從操作中、討論中觀察學生的思考與解題，並在評量中隨時修正教學內容與方法，以適合學生的能力及需要。

(三) 對教材方面的建議：

- 1.老師設計數感教學教材時，一定要多方考慮數感的六個向度。

- 2.教學內容除了取材於課本，老師自行設計的活動更能符合數感教學的需求。
- 3.數感教材的設計，時間可長可短，重質亦可重量，須根據老師上課的需求與學生的參與情形作調整、修正。

(四) 對未來研究的建議：

- 1.可針對不同程度學生作學習潛能之分析。
- 2.可進行較長時間的實驗處理。
- 3.數感能力測驗可再修改得更完善。
- 4.行動研究過程中多方詢問意見及多元思考。

參考文獻

- 支毅君（1997）：我國國小三年級數感教學研究。*台東師院學報*，**8**，83-116。
- 吳國銘、洪碧霞、邱上貞（1995）：國小學童在動態評量中數學解題學習歷程與遷移效益之探討。*測驗年刊*，**42**，61-84。
- 林素微（1996）：國小六年級學童數學解題彈性思考動態測量之研究。國立台南師範學院國民教育研究所碩士論文。
- 莊麗娟（1996）：國小六年級浮力概念動態評量的效益分析。國立高雄師範大學教育學系碩士論文。
- 莊麗娟（2000）：系統化多元評量模式之發展研究。國立高雄師範大學教育學系博士論文。
- 陳進福（1997）：國小輕度智障學童數學解題動態測量之研究。國立嘉義師範學院國民教育研究所碩士論文。
- 楊德清（1998）：筆算能力與數字常識表現之差異性的探討。*科學教育月刊*，**212**，3-10。
- Australian Education Council (1991). *A national statement on mathematics for Australian schools*. Melbourne: Curriculum Corporation.
- Behr, M. (1989, August). Reflections on the conference. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference* (pp. 85-88). San Diego: San Diego University, Center for Research in Mathematics and Science Education.

- Carpenter, T. P. (1989, August). Number sense and other nonsense. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference* (pp. 89-91). San Diego: San Diego University, Center for Research in Mathematics and Science Education.
- Dehaene, S. (1997). *The number sense: How the mind creates mathematics*. New York: Oxford University Press.
- Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(3), 170-218.
- Hope, J. (1989). Promoting number sense in school. *Arithmetic Teacher*, 36(6), 12-16.
- Hopkins, L. (1995). Popping up number sense. *Teaching Children Mathematics*, 2(2), 82-86.
- Howden, H. (1989). Teaching number sense. *Arithmetic Teacher*, 36(6), 6-11.
- Markovits, Z. & Sowder, J. (1994). Developing number sense: An intervention study in grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(1), 4-29.
- Markovits, Z. (1989, August). Reflections to the number sense conference. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference* (pp. 78-81). San Diego: San Diego University, Center for Research in Mathematics and Science Education.
- Markovits, Z., Hershkowitz, R., & Bruckheimer, M. (1989). Research into practice. *Arithmetic Teacher*, 36(6), 53-55.
- Marshall, S. P. (1989, August). Retrospective paper: Number sense conference. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference* (pp. 40-42). San Diego: San Diego University, Center for Research in Mathematics and Science Education.
- McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12, 2-8.
- Nation Research Council (1989). *Everybody Counts: A report to the nation on the future of mathematics education*. Washington, D.C.: National Academy Press.
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards*

- for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics(2000). *The Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.
- Resnick, L. B. (1989, August). Defining, assessing, and teaching number sense. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference* (pp. 35-39). San Diego: San Diego University, Center for Research in Mathematics and Science Education.
- Reys, R. (1989, August). Some personal reflections on the conference on number sense, mental computation, and estimation. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference* (pp. 65-66). San Diego: San Diego University, Center for Research in Mathematics and Science Education.
- Reys, R.E. & Der-Ching Yang (1998). Relationship between computational performance and number sense among sixth- and eight-grade students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(2), 225-237.
- Reys, R.E. , Reys, B. J. , McIntosh, A. , Emanuelsson, G. , Johansson, B. , & Yang, D. C.(1999).Assessing number sense of students in Australia, Sweden, Taiwan and the United States. *School Science and Mathematics*, 99(2), 61-70.
- Ritchhart, R. (1994).*Making numbers make sense*. Menlo Park, CA: Addison-Wesley.
- Schoen, H. L. (1989, August). Reaction to the conference on number sense. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference* (pp. 67-69). San Diego: San Diego University, Center for Research in Mathematics and Science Education.
- Silver, E. A. (1989, August). On making sense of number sense. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference* (pp. 92-96). San Diego: San Diego University, Center for Research in Mathematics and Science Education.
- Sowder, J. T. (1988). Mental computation and number comparison: Their roles in the development of number sense and computational estimation. In J. Hiebert & M. Behr

- (Eds.). *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp.182-197). Hillsdale, NJ: Erlbaum & Reston, VA: NCTM.
- Sowder, J. T. (1989, August). Introduction. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference* (pp.1-50). San Diego: San Diego University, Center for Research in Mathematics and Science Education.
- Sowder, J. T. (1992a). Estimation and number sense. In D.A. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. (pp.371-389). New York: Macmillan.
- Sowder, J. T. (1992b). Making sense of numbers in school mathematics. In G. Leinhardt, R. Putnam, & R. A. Hatrup (Eds.). *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching* (pp.1-51). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Stanger, C., Symington, L., Miller, H., & Johns, S. (2000). Teaching number sense concepts to all students. *Teaching Exceptional Children*, 33(1), 65-69.
- Thompson, C. S. & Rathmell, E. C. (1989). By way of introduction. *Arithmetic Teacher*, 36(6), 2-3.
- Thornton, C. A., & Tucker, S. C. (1989). Lesson Planning: The key to developing number sense. *Arithmetic Teacher*, 36(6), 18-21.
- Trafton, P. (1989, August). Reflections on the number sense conference. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference* (pp. 74-77). San Diego: San Diego University, Center for Research in Mathematics and Science Education.
- Trafton, P. R., & Hartman, C. L. (1997). Developing number sense and computational strategies in problem-entered classrooms promising research, programs, and projects. *Teaching Children Mathematics*, 4(4), 230-233.
- Vacc, N. N. (1995). Gaining number sense through a restructured hundreds chart. *Teaching Exceptional Children*, 28(1), 50-55.

Integrating Dynamic Assessment on Number Sense Instruction

Chi-lin Liu¹ Che-jen Hsieh²

¹Po-Ai Elementary School, kaohsiung ²Mei-Ho Institute of Technology

Abstract

The purpose of this study was to integrate dynamic number sense assessment (DNSA) in mathematical instruction to investigate the transferring process in number sense ability for fourth graders.

This study was a quasi-experimental study. The subjects were fourth graders in 2 classes. One class was assigned to the experimental group, and the other class was assigned to the control group. DNSA was conducted for a period of two months. DNSA included two parts – instruction and assessment. The instruction interlaced both “group discussion on unitized topic” and “subsequent discussion of individual’s worksheet”. The assessment was also conducted from two aspects – quantity and quality, in which one was to record the change in number sense ability of students through quantification of continuous individual’s worksheet, the other was to show the qualitative transferring process of students’ number sense ability by use of students’ group discussion record and individual worksheet. This study also adopted a number sense test (NST) for pre-test and posttest to differentiate students’ number sense ability in experimental group and control group. The major findings were summarized as the followings:

- 1.The instruction effect of the DNSA came off well: after paired- sample t-test, the performance of post-test for experimental group was significantly higher than that of pre-test; after one- way analysis of covariance, the performance of post-test for experimental group was also significantly superior to that of the control group.
- 2.The quantitative change in DNSA toward students: After paired-sample t-test, the individual’s continuous worksheets of each unit almost had significant progress.
- 3.The qualitative change in DNSA toward students: the students’ concept was enhanced, their thinking became more flexible, and their strategies became more diversified. The students were not only able to solve the questions by linking their life experiences, flexibly making effective estimation with benchmark, and

flexibly utilizing strategies or tools, and real internalized large number; they also were able to bring mathematics into daily life through reasonable judgment based on different circumstances.

Key words: Number Sense, Dynamic Assessment