直觀規律對國小代課教師數學解題的影響

呂玉琴[1]　　陳瑞發[2]

[1]國立台北師範學院數學教育學系
[2]台北縣民安國民小學

（投稿日期：92 年 9 月 19 日；修正日期：92 年 11 月 6 日；接受日期：93 年 2 月 17 日）

摘　　要

本研究主要目的為：探討直觀規律對國小代課教師解數學問題的影響。研究對象為國小代課教師共 40 位，研究方法為紙筆測驗。受測時間為 50 分鐘。

研究結果包括：（1）國小教師解題時會受 More A-More B、Same A-Same B 直觀規律的影響。（2）有的教師解題時會同時考慮知識、經驗和直觀規律，這三者彼此競爭，最後其中之一成為解題的依據。（3）解題時，計算可能是影響教師使用直觀規律解數學問題的主因。此現象可能和受測者有足夠時間可以透過計算來解題有關。

根據研究結果，我們提出一些研究上的建議。

關鍵詞：直觀規律、國小代課教師、數學

壹、 緒論

一、研究動機與目的

Fischbein（1987）認爲直觀在數學的學習中扮演極重要的角色，並強調不可忽略「直觀」層面的數學活動。學生可以透過個人的生活經驗，經由直觀的想法將有限的知識加以推廣，因而直觀可以提供闡釋與反映外在數學的一種方式。研究者在教學時亦發現國小學生在數學解題的過程中有直觀的想法。例如：2 公尺長的繩子平分成 3 段，每一段長多少公尺？部分學生會回答 $3 \div 2 = 3/2$；訪談後發現，學生直觀的認爲被除數要比除數大才可以。所以當學生在解決問題時，我們便不得不注意「直觀」層面對學生解題的影響。

學生因直觀想法而對問題不能提出清楚和完全的證明所作出的猜測，勢必影響學生日後對該概念的學習。Hahn（1956）曾提及：直觀是迷思概念的主要來源，應以嚴謹的科學方法，努力加以排除。但是 Spinoza（1967）則認爲：直觀是一種最高形式的知識，數學如果沒有直觀，就沒有真正的創造。Hersh（1998）亦提到：「從數學實証上我們看到直觀是到處存在的」。因爲要能看到不同數學主題之間的關連是需要數學的直觀，Fischbein（1987）也認爲在科學和數學上，沒有直觀就沒有真正的創造性活動。無論直觀對學習的影響是正面或負面的，直觀在學生學習的過程中扮演著一個重要的角色。

直觀在數學學習上扮演十分重要的角色，但令人好奇的，究竟什麼是直觀？它是不是存在了某些特性，以提供教師診斷學生學習的參考依據？是不是可以經過適當的教學而改變學生的直觀？以及學生在數學學習上，是否存在相類似的直觀表現？如果有的話，我們是不是可以從中找出一些規律，以改進學生的學習？

「直觀」是什麼？ Kant（1980）曾提及：「直觀是直接掌握物體的能力，偏重感官知識」。Fischbein（1987）也曾經解釋：「直觀是一種主觀而可以直接接受，不需外在的理由或形式上的證明，它在個人推理及假設或解答時，具有高壓性的影響，同時是一種組織過的認知，

有單一而整體的觀點，其活動是無意識的，常難以去掌握。」他更進一步地提出直觀的特性有：不證自明、立即性、理所當然性、堅定性、強制高壓性、外推性、整體性以及暗隱性等。

Fischbein（1987）同時將直觀分為「原始直觀」和「二階直觀」。原始直觀是發生在理論發展上或個體觀點的建構，在個體的理解上，原始直觀不是一種動力，就是一種阻力。而二階直觀不是源自某一概念領域，就是來自於這個概念的系統化教學。Feller（1957）也認為：直觀是可以改變的。例如：高度的直觀可經由適當的教學而形成，且有助於建立正確的數學概念。

Stavy, Tirosh, Tsamir & Ronen（1996）、Tirosh & Stavy（1999）研究指出，學生在某些數學及科學問題上直觀的反應相當類似，這些問題的內容領域和所需的推理能力是不同的，但是它們有一些共同的外在特徵。到目前為止他們已經發現四種直觀規律：More A-More B、Same A-Same B、有限細分（Everything comes to an end）和無限細分（Everything can be divided）。由於他們已發展一些工具在評量學生的表現，我們可以利用這些工具去評量其他受試者，是否在這些問題上同樣也受直觀規律的影響。

Tirosh（2000）曾提到：師資培育機構應加強教師對學生迷思概念來源的了解。因為唯有深入去了解學生迷思概念的各種來源，才能預測學生產生錯誤的原因，進而修訂教學者的教學計劃，以幫助學生得到正確的數學知識，而「直觀」正是學生迷思概念的可能來源之一。

學生對於數學概念的第一印象最為深刻，影響也最為長遠。而此第一印象的來源，除了來自生活經驗以外，另一個主要來源便是教師。也就是說：學生的概念形成，教師本身亦扮演重要的角色。

正因如此，對於扮演重要角色的教師而言，是否更應進一步的檢核自身的知識內涵，是否受到直觀規律的影響？受何種類型直觀規律的影響？以提供師資培育機構了解教師在解題過程中，所產生的錯誤和背後真正原因，以作為師資培育機構在未來課程設計上的一個參考依據。基於研究者的職務方便，我們以國小代課教師為研究對象，因此，本研究的目的為：

探討直觀規律對國小代課教師在解數學問題時的影響。

二、名詞解釋與界定

由於本文在探討直觀規律對解數學問題的影響，因此我們將在下一節的文獻探討中說明直觀規律的類別及相關的研究。而以往的數學解題研究發現受測者會使用知識、直觀或生活經驗來解題，我們以舉例的方式來說明這三者的差異。

國小一年級的學生在判斷〝 斜線部分是否占全部圖形的二分之一〞時，說〝因為它下面是這個形，上面也是這個形，那是一樣喔！〞該生以整體導向來思考，缺乏精確的驗證，很難將其思考歷程適當的告訴別人，這就是使用直觀來解題的表現（呂玉琴，1991)。國小教師常常以為學生在解上述問題時，需具有直徑、圓、圓面積等概念，透過將圓的直徑畫出，看直徑是否能切出一黑一白的二個小半圓，再將黑、白二個小半圓互換，形成黑白二個大半圓才能解題。國小教師所描述的解法就是使用知識來解題的一種表現。使用知識解題通常包括各種解題步驟,而且解題者通常可以將其思考歷程適當的告訴別人(呂玉琴，1994)。

高一、二的學生解〝父子兩人分別騎大小不同的腳踏車去郊遊，已知大腳踏車轉 7 圈和小腳踏車轉 11 圈的距離一樣，而父親每踩 5 圈所花的時間和兒子每踩 8 圈的時間一樣，求大車前進速率：小車前進速率＝______〞時，有的學生固定圈數，利用 $v_1 : v_2 = \frac{s_1}{t_1} : \frac{s_2}{t_2}$ 來計算 $\frac{11}{\frac{1}{5}} : \frac{7}{\frac{1}{8}}$ 而獲得答案。這種解法就是使用知識來解題的一種表現。另外有些學生認為〝因為父親和兒子一起騎，父親會等兒子，故速率相等〞，學生以這種問題出現在生活中會出現的情況來作為解題的依據，就是使用生活經驗解題的一種表現（林福來，1990)。

三、文獻探討

Tirosh & Stavy（1999）提出了四種直觀規律，其中第三種、第四種直觀規律是相對關係，我們將這二種直觀規律合併在一起說明，亦

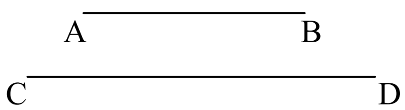
即我們將四種直觀規律分成三部分，分別說明如下。

(一) More A - More B

在二個物體大小比較的問題情境中，甲物體的 A1 量大於乙物體的 A2 量，學童會使用二物體中較明顯的量（A1、A2），去比較問題情境中所求量（B1、B2）的大小。解題過程只經由 A1＞A2 的判斷，而不適當的推得 B1＞B2。我們以學生解底下三個問題爲例來說明。

例 1：比較大小 ，4X□2X

例 2：下圖爲兩條線段：



(　　)比較線段 AB 及線段 CD 上點數的多寡。線段 AB 上的點數(①多於②等於③少於)線段 CD 上的點數。

例 3：$\frac{1}{2}$和$\frac{1}{3}$那一個數較大？

在例 1 中，根據 Stavy, Tirosh, Tsami & Ronen（1996）針對 9 到 12 年級學生調查結果顯示，分別有 89%、88%、69%和 61%的學生因 4＞2 而判斷 4X＞2X，以直觀規律 More A-More B 來解釋，即 A1＝4，A2＝2，B1＝4X，B2=2X，學生因 A1＞A2，而推論 B1＞B2。謝展文（2000）發現，台灣四、五、六年級學生解例 1 的類似題時受 More A - More B 影響的百分率分別爲 84.4%、79%和 81.4%。在例 2 中， Stavy & Tirosh（1996）發現在 13-25 歲的研究對象中，不論任何年紀，大約有一半的學生會因爲線段 CD 比線段 AB 長，而推論出 CD 比點數多於 AB 上的點數。部分學生會藉由線段的長短（量 A）來判斷點數（量 B）的多少。在例 3 中，Pitkethly & Hunting（1996）發現年紀小的學生多因爲 3＞2，所以認爲 $\frac{1}{3} > \frac{1}{2}$。

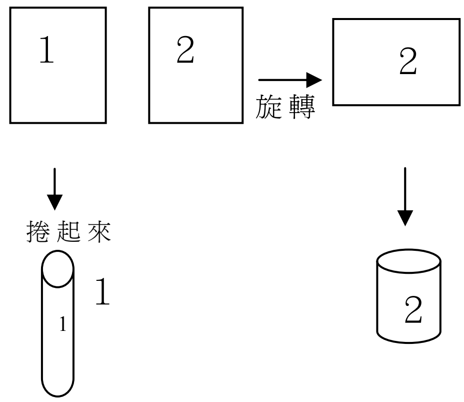
（二）Same A - Same B

在二個物體大小比較的問題情境中，甲物體的 A1 量等於乙物體

的 A2 量，學童會使用二物體中較明顯的量（A1、A2)，去比較問題情境中的所求量(B1、B2)的大小。解題過程只經由 A1＝A2 的判斷，而不適當的推得 B1＝B2。

例 4：Carmel 家想要兩個孩子，Levin 家想要四個孩子。假設他們都能成功。請問：(　　) Carmel 家的孩子一男一女的可能性(①大於②等於③小於) Levin 家的孩子是二男二女的可能性。

例 5：取兩張大小相同的長方形(不是正方形)紙張(紙 1 和紙 2)：將紙 2 旋轉 90 度(如右圖)。如果分別將兩張紙捲起來(如圖所示)，就會得到兩個圓柱體：圓柱體 1 和圓柱體 2。



1(　　)比較紙 1 和紙 2 的面積大小。紙 1 的面積(①小於②等於③大於)紙 2 的面積。

2(　　)比較圓柱體 1 和圓柱體 2 的體(容)積大小。圓柱體 1 的體(容)積(①小於②等於③大於)圓柱體 2 的體(容)積。

例 6：有一個長方形，將其較長邊增加 20%，較短邊減少 20%，原來的周長和改變後的周長的關係是，＜、＞、＝？

在例 4 中，Tirosh & Stavy（1999）發現 10~12 年級學生的答對率分別是 24%、42%和 30%。部分學生受到一男一女的比值（A1）和二男二女的比值（A2）相等，而推論出生一男一女的機率（B1）和生二男二女的機率（B2）相等。在例 5 中，從幼稚園到九年級的 40 個學生中，從二年級開始，大部分學生認爲面積保持不變，從四年級開始，有 85%的學生認爲兩個圓柱體的體積也相等(Tirosh & Stavy, 1999)。主要的原因是由於同樣的面積（量 A）所以得到相同的體積（量 B）。在例 5 中，謝展文（2000）發現，國小四、五、六年級學生受 Same A –

Same B 影響的百分率分別為 60.2%、64.7%和 62.7%。在例 6 中，Mendel（1998）的研究發現僅有 8%的 11 年級學生能正確的回答長邊增加的長度比短邊減少的長度還要長。而有 72%的 11 年級學生認為增加和減少的都是 20%，所以周長不會改變。

在這些比較問題中，兩個主體或系統的 A 量是較明顯且相等的(A1= A2)，但 B 量是不相同的(B1≠B2)。從上述的例子可以發現：A 量是直接給予的（如例 5、例 6），或是可以邏輯推論出來的(如例 4)。

（三）有限細分與無限細分

有限細分規律主要是來自生活經驗的影響，因為學童在生活中常有分東西的經驗，所以會認為物體是會分完的，或物體無法一直分下去。所以形成在處理連續分半或不斷降低比例的判斷是「有限次分完」或「可無限次不停的分」的問題中，不論是在數學、物理、化學或是生物各種領域，皆可能使用有限的概念「東西太小不能分」、「分到不能分」的想法解決問題。

無限細分規律主要是受數學的無限概念學習的影響，如：線段上有無限多的點、無限數列、數學歸納法…等，所以形成在處理連續分半或是降低比例的判斷是「有限次分完」或「可無限次不停的分」的問題中，不論是在數學、物理、化學或是生物各種領域，皆可能使用無限的概念「每樣東西都可以分二半」、「一半還有一半」解決問題。

例 7： 1 ， $\frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{4}$ ， $\frac{1}{8}$ ， $\frac{1}{16}\ldots$

在這個數列中，後面的數字的大小是前面數字的一半。如果我們將這個數列一直這樣重複的分，請問是否可以不斷的分下去？

在例 7 中，國小四、五、六年級學生受無限細分規律影響的百分率分別為 65%、84.8%和 93.1%。受有限細分規律影響的百分率分別為 28.2%、12.4%和 5.9%（謝展文，2000）。上述數據可以看出台灣國小學生隨著年級的增加，有較多的學生選擇無限細分的回答。

貳、 研究方法與過程

一、研究方法

本研究欲探討直觀規律對國小代課教師解數學問題的影響，由於研究對象爲國小代課教師，有足夠的語文表達能力，所以研究方法以筆測的方式進行。爲了了解教師解題上是不是受到直觀規律的影響，在教師選擇答案之後，都進一步要求教師寫下他們選擇該答案的理由。

二、研究過程

（一） 研究工具

問卷題目選取自 Tirosh & Stavy (1999)等論文，共 7 題。這些題目是 Stavy 在 2000 年 3~5 月來台灣辦理每星期一次有關直觀規律工作坊中所討論的部分問題。本問卷之信度爲 0.7382。本問卷之試題經由參與工作坊的學者將英文試題翻譯成中文試題，這些學者包括林福來教授、張英傑教授、鍾靜教授、譚寧君教授等人，因此試題具專家效度。又我們想了解直觀規律 more A – more B、Same A – Same B 對數學解題的影響，因此我們從以色列的試題中，選出四題（第一～四題）被他們歸類爲 more A – more B 的題目，三題（第五～七題）被他們歸類爲 Same A – Same B 的題目，因此試題具內容效度。

（二） 研究對象

受時間和經費的限制，研究對象是立意取樣。對象是任職國小的代課老師一共 40 位。他們都是利用假日在某師範學院進行爲期四年的專業進修，而將要成爲正式教師的四年級同一個班級的學生。

（三） 筆測

筆測是以團體方式進行，施測的地點是在受試者在該師院進修的上課教室。施測過程讓受試者有足夠的時間可以答題，問卷試題均在 50 分鐘以內可以完成。

（四） 資料處理

問卷回收後，以人工方式進行閱卷，就國小教師的答案加以分類，

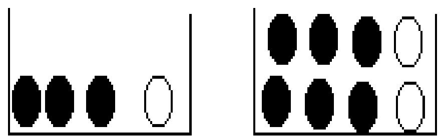
再將結果輸入電腦計算其各種答案類型的百分率，並將國小教師各題回答的理由加以分類，以了解國小教師回答原因類型，及是否採用直觀規律回答問題。

參、 研究結果

研究結果將逐題分析國小教師的答題表現。由資料分析發現，國小教師的答題表現，除了受數學知識及直觀規律的影響外，還受生活經驗的影響。因此，我們將教師回答的理由依知識、生活經驗、直觀三方面進行討論。有關跨題表現的比較則留待結論與討論中呈現。

一、不同黑、白棋數的機率比較問題

題目一、下圖中的兩個袋子各裝有黑棋及白棋。



甲袋：3 黑 1 白。

乙袋：6 黑 2 白。

甲袋　　乙袋

1.（　）哪個袋子取到黑色棋子的機率較大？①機率相等②甲袋③乙袋④不知道。

2.爲什麼？請說明你的理由。

表 1　國小教師在黑棋白棋機率問題的表現

選項	人數	百分率	理由
（１）機率相等	33	82.5%	◆機率相等，3/4=6/8（３１） ◆袋子只有黑白兩色棋子，所以非黑即白，機率相同（２）
（２）甲袋	1	2.5%	◆甲袋中的黑棋如果重覆取，必使黑棋的機率大增（１）
（３）乙袋	5	12.5%	◆3/4=6/8，但黑球比較多，甲袋中黑－白＝２，乙袋中黑－白＝4，4＞２，乙袋大（２）

			◆用眼睛看，乙袋黑棋有 6 個，乙袋中黑棋較多，被抽中的機率較大（１） ◆表面上似乎機率相等，但如果去選擇不同學校的教師甄試，同樣的情形之下，雖然甄試錄取的機率一樣，但我會選擇錄取人數較多的學校去參加考試，所以我選擇乙袋（１） ◆因爲重複取棋子，每次取皆放回袋內，乙的取出黑色機率較甲袋多，若不重複取棋子，且每次取後不放回，則甲、乙的取出黑色機率一樣大（１）
（４）不知道	1	2.5%	◆沒有說明一次取幾顆，拿出後是否放回去（１）

註：理由欄括號內之數字代表回答該理由的人數

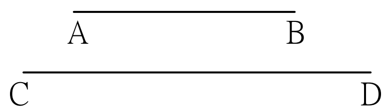
根據表 1，將教師回答的理由，詳細說明如下：

1. 知識型：有 31 位教師都列出正確的算式，說明甲袋和乙袋的機率相等。另外有 3 位教師有錯誤的機率知識，如「因爲重複取棋子，每次取皆放回袋內，乙的取出黑色機率較甲袋多，若不重複取棋子，且每次取後不放回，則甲、乙的取出黑色機率一樣大」。
2. 直觀型：有二位教師受 Same A – Same B 的影響，而回答「袋子只有黑白兩色棋子，所以非黑即白，機率相同」，因爲兩個袋子都只含〝相同顏色的二種棋子〞(Same A)，所以認爲〝機率相同〞(Same B)。有一位教師受 More A – More B 的影響而回答「乙袋中黑棋較多，被抽中的機率較大」。
3. 同時考慮知識與生活經驗，但最後以生活經驗爲依據：有一位教師雖然算出了正確的機率答案，卻又從生活的例子－「甄試經驗」去思考問題。而選擇乙袋的機率較大。
4. 同時考慮知識與直觀，但最後以直觀爲依據：有二位教師雖然算出機率相等，但他們直觀的認爲乙袋的黑球比較多或是黑－白＝４，都是比甲袋多。所以，他們選擇乙袋爲答案。亦即，在直觀規律和

數學知識二者選擇下，這二位老師最後選擇了直觀規律作爲解題的主要策略。

二、線段上點數目的比較問題

題目二、下圖爲兩條線段：



１.(　)比較線段 AB 及線段 CD 上點數的多寡。線段 AB 上的點數(① 多於② 等於③ 少於)線段 CD 上的點數。

２.爲什麼？請說明你的理由。

表 2　國小教師在線段上點數目比較問題的表現

選項	人數	百分率	理由
（２）等於	14	35%	◆線段上有無數的點（12） ◆點可大可小，若 AB 線段的點較小 CD 線段的點較大，則二線段的點的數目可以相等（1） ◆AB 線段有 A、B 二點 CD 線段有 C、D 二點（1）
（３）少於	26	65%	◆線段 AB＜線段 CD，所以 AB 的點數＜CD 的點數（24） ◆若密度相同的話，CD 線段的點數會較多（1） ◆未說明原因（1）

註：理由欄括號內之數字代表回答該理由的人數

根據表 2，將教師回答的理由，詳細說明如下：

1. 知識型：有 12 位教師回答「線段上有無數的點」。這個回答的理由無法判斷教師本身對線段上點的概念是否正確，因爲同樣含有無限多個元素的兩個集合，其元素個數可能一樣多，也可能不一樣多。另外分別各有 1 位教師用密度、點的大小來解題，但是實際上，點是不佔空間大小的。另外，有 1 位教師具有錯誤的點知識，如「AB

線段有 A、B 二點，CD 線段有 C、D 二點」，但他卻是得到正確的選項。

2. 直觀型：有 24 位教師受 More A – More B 的影響，以線段長度的長短做為判斷點數目多寡的標準，如「線段 AB＜線段 CD，所以 AB 的點數＜CD 的點數」。

三、含有未知數的比較問題

題目三、在下列的方格□內填入＞、＝、＜，如果無法決定請填「？」。	
(１)．４X □ ２X	(２)．３(a＋b) □ 2(a＋b)
為什麼？請說明你的理由。	為什麼？請說明你的理由。
(３)．$\frac{3X}{2}$ □ $\frac{5X}{2}$	
為什麼？請說明你的理由。	

表 3　國小教師在含有未知數比較問題的表現

類型	人數	百分率	理由
3 小題皆填？	37	92.5%	◆因為 X 或（a+b）的範圍沒有界定是正數或負數（３７）
1、2 小題填＞ 第 3 小題填＜	2	5%	◆設 X，a+b 為一定值（１） ◆設 X 是正整數、a+b＞0、X＞0（１）
1、3 小題填＝ 第 2 小題填＞	1	2.5%	◆如果 X=∞或 0，都可能是一樣（１）

註：理由欄括號內之數字代表回答該理由的人數

根據表 3，40 位教師中有 37 位教師具有解本題的數學知識，對於未知數的範圍都做出正確的考慮而三題都選擇「？」的回答。但是有 3 位教師做出不適當或不周延的反應。至於直觀規律部分，是否有採用數字大小來比較問題的結果這一部份，從教師在第 1、2 小題填＞，第 3 小題填＜，而又回答「設 X，a + b 為一定值」的理由來看，這位教師確實受到直觀規律 More A – More B 的影響。

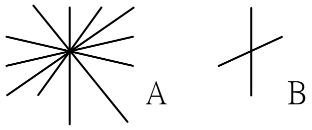
四、交點大小的比較問題

題目四、下圖中，點 A 是六條直線的交點，點 B 是二條直線的交點。

１.(　　)點 A 跟點 B 可不可以比較大小？(①可以②不可以)。

如果回答「可以」，請繼續回答２、３題。

如果回答「不可以」，請繼續回答３題。



２.(　　)比較點 A 和點 B 的大小。(①點 A 小於點 B②點 A 等於點 B③點 A 大於點 B)

３.爲什麼？請說明你的理由。

表 4　國小教師在交點大小比較問題的表現

選項	人數	百分率	理由	
（１）可以比較	16	40%	選「等於」：9人	◆點是一個實體，可以比較大小，應該考慮線段的粗細而不是考慮線段的大小（２） ◆都是一個點，重疊在一點大小不變（４） ◆以座標表示（１） ◆未說明原因（２）
			選「大於」：7人	◆因爲有 6 條直線相交，重疊在一起，所以構成的點 A 略大於點 B（６） ◆未說明 g 原因（１）
（２）不可比較	24	60%	◆點不可以比較大小或無法比較（１４） ◆沒有明確的數值來比較大小（２） ◆筆或是線的粗細並沒有交待（３） ◆交叉的仍是一點（１） ◆點是一種空間（１） ◆未說明原因（３）	

註：理由欄括號內之數字代表回答該理由的人數

根據表 4，將教師回答的理由，詳細說明如下：

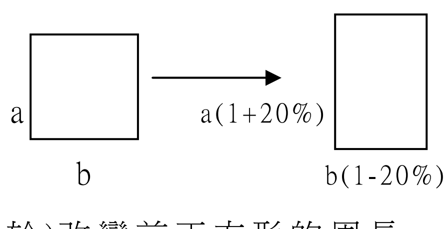
1. 知識型：點是不佔空間沒有大小之別，從第一小題的回答選項發現，似乎有 24 位教師有正確的點知識。但仔細分析其原因，僅有 14 位教師正確的說明點不可以比較大小。
2. 直觀型：有 7 位教師用直觀規律 More A – More B 去解釋，如利用「重疊數目」來說明點 A 比點 B 大。有 4 位教師認爲 A、B 都是一個點，所以點的大小相同，採用直觀規律 Same A – Same B 來解釋點 A 等於點 B。
3. 同時考慮知識和直觀，最後以直觀爲依據：在選擇「可以比較」的錯誤選項中，發現有 2 位教師以錯誤的點概念回答「應該考慮線段的粗細，而不是考慮線段大小」，所以當他們看到線段粗細相同，就認爲點的大小相同，採用直觀規律 Same A – Same B 的想法，選擇交點大小相等。

由上述 1、3 點可知，不論在選「可以比較」或「不可以比較」都發現部分教師受到點與線段表徵的影響，認爲點和線段都佔有空間，而產生錯誤的知識。

五、正方形邊長同增減 20%的比較問題

題目五、右圖爲正方形：

a 邊的長增加了 20%，且 b 邊的長減少了 20%



１.(　　)比較改變後及改變前的周長。改變後長方形的周長(① 小於 ② 等於 ③ 大於)改變前正方形的周長。

２.爲什麼？請說明你的理由。

３.(　　)比較改變後及改變前的面積大小。改變後長方形的面積(① 小於 ② 等於 ③ 大於)改變前正方形的面積。

４.爲什麼？請說明你的理由。

這一題和前面幾個問題不同，它多了一個檢驗問題。主要的目的是用來檢驗教師是否會經由周長一樣，而錯誤的推論出面積一樣的 Same A – Same B 直觀規律。

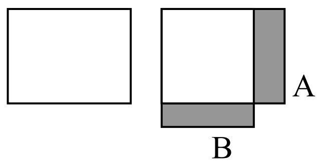
表 5 國小教師在正方形邊長同增減 20%，周長和面積的變化問題的表現

	選項	人數	百分率	理由
題 1	（２）等於	40	100%	◆經過計算（３９） ◆未說明原因（１）
題 3	（１）小於	37	92.5%	◆經過計算（３４） ◆用相同一條線圍起來的面積正方形最大（２） ◆未說明原因（１）
	（２）等於	2	5%	◆甲的面積等於乙的面積（１） ◆只有形狀改變，面積並沒有改變（１）
	（３）大於	1	2.5%	◆看圖比較，改變後的圖比較大（１）

註：理由欄括號內之數字代表回答該理由的人數

根據表 5，將教師回答的理由，詳細說明如下：

1. 知識型：在第 1 題中，除 1 位教師未說明理由外，所有的教師都透過計算得到正確的答案，這說明所有的教師都具有解本題所需的知識。在第 3 題中有 34 位教師經過正確計算來說明原因，有 2 位教師則使用「用相同一條線圍起來的面積正方形最大」的數學知識來解題。
2. 直觀型：在第 3 題中，有一位教師利用視覺判斷，認為增加的 B 部分和減少的 A 部分相等(如右圖)，改變前後的面積不變。也有教師用視覺直觀來判斷面積的大小，如「看圖比較，改變後的圖比較大」。



六、生育的機率比較問題

題目六、張家想要兩個孩子，王家想要四個孩子。假設他們都能成功。 請問： １.(　　)張家的孩子一男一女的可能性(①大於②等於③小於)王家的孩子是二男二女的可能性。 ２.爲什麼？請說明你的理由。

表 6　國小教師在生育的機率比較問題的表現

選項	人數	百分率	理由
（１）大於	22	55%	◆一男一女的機率 1/2，二男二女的機率 3/8（４） ◆一男一女的機率 1/4，二男二女的機率 1/16（５） ◆一男一女的機率 1/3，二男二女的機率 1/5（８） ◆一男一女的機率 1/2，二男二女的機率 1/4（１） ◆一男一女的機率 1/2，二男二女的機率 1/5（１） ◆因爲生男生女的機率都是 1/2，但我想生得越多，要負擔的風險也應相對提高（２） ◆未說明原因（１）
（２）等於	16	40%	◆生男生女的機率都是 1/2（１２） ◆機率爲 1/4（１） ◆比率相同（２） ◆以機率上來說是等於，但從醫學角度來說就不一定了，因涉及媽媽的生理期、爸爸做工的努力程度、父母雙方的身體健康情況…等很多問題（１）
（３）小於	2	5%	◆一男一女的機率 1/4，二男二女的機率 1/2（１） ◆未說明原因（１）

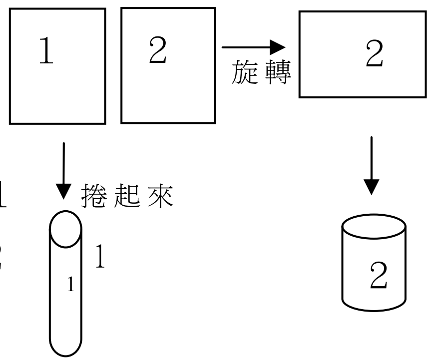
註：理由欄括號內之數字代表回答該理由的人數

根據表 6，將教師回答的理由，詳細說明如下：

1. 知識型：多數的教師都會利用機率的知識去解題，也選擇出了正確的選項，但是從回答的理由中發現，真正使用正確的機率概念去解題的教師，實際上只有 4 位。
2. 直觀型：從回答「等於」的 16 位教師中可清楚看到有 14 位教師採用 Same A – Same B 的直觀規律去解決問題，如「生男生女的機率」或「比率」相同。
3. 同時考慮經驗和知識或直觀，但最後以知識或直觀爲依據：有一位教師受錯誤的知識或是直觀影響而回答「以機率來講是等於」，但這位教師也考慮到實際生活中的其他因素，如媽媽的生理期、爸爸做工的努力程度...等問題。但最後以知識或直觀爲解題的依據。

七、相同長方形紙張捲起後體積的比較

題目七、取兩張大小相同的長方形(不是正方形)紙張(紙 1 和紙 2)：將紙 2 旋轉 90 度(如右圖)。



1.(　　)比較紙 1 和紙 2 的面積大小。紙 1 的面積(①小於②等於③大於)紙 2 的面積。

2.爲什麼？請說明你的理由。

如果分別將兩張紙捲起來(如圖所示)，就會得到兩個圓柱體：圓柱體 1 和圓柱體 2 。

3.(　　)比較圓柱體 1 和圓柱體 2 的體(容)積大小。圓柱體 1 的體(容)積(①小於②等於③大於)圓柱體 2 的體(容)積。

4.爲什麼？請說明你的理由。

這一題和第五題一樣，多了一個檢驗問題。主要的目的是用來檢驗教師是否會經由面積相同而錯誤的推論出體積一樣的 Same A – Same B 直觀規律。

表 7　國小教師在相同長方形紙張捲起後體積的比較問題的表現

	選項	人數	百分率	理由
題1	（１）小於	5	12.5%	◆圓的表面積＝２個圓面積＋側面積，紙 2 圓面積較大，1、2 側面積相等，所以 1＜2（５）
	（２）等於	35	87.5%	◆相同的紙的面積一樣（１３） ◆經過計算（２０） ◆未說明原因（２）
題3	（１）小於	31	77.5%	◆經過計算（２３） ◆視覺判斷，因為圓柱體１的底面積小，雖高度長一些，但仍是體積小；而圓柱體２是用長方形的長去圍的，範圍較大，故體積較大。（５） ◆因為紙２的底面積＞紙１的底面積，所以圓柱體２的體積＞圓柱體１的體積（３）
	（２）等於	9	22.5%	◆紙張大小一樣，同樣大小的紙張作成的體積應該也不會改變（６） ◆未說明原因（３）

註：理由欄括號內之數字代表回答該理由的人數

根據表 7，將教師回答的理由，詳細說明如下：

1. 知識型：無論在第 1 題或是第 3 題中都有一半以上的教師採用正確的數學知識，經由計算而得到答案。同時也有 13 位教師利用量的保留概念，知道相同的紙的面積一樣，而在第 1 小題得到正確的答案。
2. 直觀型：有 3 位教師受直觀規律 More A – More B 的影響而回答「因為紙２的底面積＞紙１的底面積，所以圓柱體２的體積＞圓柱體１的體積」。同時，有 6 位教師受直觀規則 Same A – Same B 的影響而回答「紙張大小相同」所以體積應該也不會改變。

肆、 結論與建議

一、結論

根據研究的結果，將 40 位國小代課教師採 More A – More B 或 Same A - Same B 解題的人數統計如表 8。

表 8　國小教師採直觀規律解數學比較問題的人數

人數（百分率）／題號／直觀規則	1	2	3	4	5	6	7
More A – More B	3 (7.5%)	24 (60%)	1 (2.5%)	7 (17.5%)	0 (0%)	0 (0%)	3 (7.5%)
Same A – Same B	2 (5%)	0 (0%)	0 (0%)	4 (10%)	1 (2.5%)	14 (35%)	6 (15%)

從表 8，配合國小教師作答的情形，我們得到以下結論：

1.國小代課教師在各題中受直觀規律影響的人數都不相同，探討其可能的原因，發現都和〝計算〞有關，細分有二：

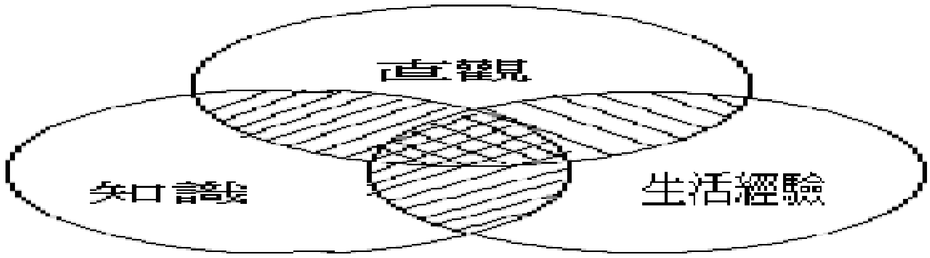
（1）是否可以透過計算解題。我們發現線段上點數目題（第 2 題）因爲無法透過計算，而有較多的教師（24 位）受直觀規律的影響，而其他題目大都需要或多或少的計算，其使用直觀規律的人數則減少許多，最多只有 14 位受直觀規律的影響。

（2）解題時所需的計算難易。生育的機率題（第 6 題）和相同長方形捲起後體積問題（第 7 題）都可透過計算解題，前者計算較複雜，後者比前者容易，但計算仍稍難，結果前者有 14 位教師採直觀的想法解題，後者有 9 位教師採直觀的想法解題。在黑、白棋數的機率題（第 1 題）和正方形邊長同增減 20%題（第 5 題）中，教師多可透過簡單的計算，而推得黑棋機率和面積大小，結果受直觀規律的影響分別只有 5 位和 1 位教師。

根據上述分析，我們發現題目計算的難易程度，影響教師在直觀規律的表現。計算愈簡單的題目受直觀規律的影響愈小；反之計算愈複雜的題目，受直觀規律的影響也愈大，但不需計算的題目受直觀規律的影響最大。造成〝計算可能是影響教師使用直觀規律解數學問題

的主因〞，可能和受測者有足夠時間可以透過計算來解題有關。

2.本研究除了和一般的研究一樣，發現解題者會使用自己的知識(如：陳秀雯，2002)、生活經驗（如：林福來，1990）或直觀規律（如：謝展文，2000)來解題外，本研究還發現一個其他研究鮮少發現的現象，即：解題者同時考慮知識、生活經驗、直觀規律中的多項因素來解決問題，其影響解題的三個因子的關係圖先呈現如下，其後再作說明。



圖一：影響解數學比較問題的三個因子的關係圖

在解題過程中，有時教師單純的根據直觀的想法解決問題，有時教師是根據知識來解決問題，有時教師會根據日常生活經驗來解決問題。但是研究亦發現部分教師不只受直觀、知識和生活經驗三方面中的一方面來解決問題。所以解題的過程是十分複雜的，可能只包含單一因子，有時可能同時包含二個或三個不同的因子，彼此競爭從事解題。

以下將教師解題時，在直觀、知識和生活經驗三方面相互競爭的情形說明如下：(1）直觀重於知識：以黑棋白棋機率問題爲例，有 2 位教師以數學知識算出機率相等，也直觀的考慮乙袋的黑球比甲袋多，但他們最後選擇乙袋抽到黑球的機率大。由此可見，這 2 位教師在直觀和知識二者的競爭下，最後直觀重於知識，選擇以直觀的想法作爲解題的主要依據。(2）生活經驗重於知識：以黑棋白棋機率問題爲例，有 1 位教師雖然算出了正確的機率答案，卻又從生活經驗去思考問題。他說：如果他去選擇不同學校的教師甄試，雖然甄試機率一樣，但他會選擇錄取人數較多的學校去參加考試。這可能是由於生活經驗中，如果錄取名額多的話，內定錄取人數的問題較不會影響到他

本身錄取的可能性。另外，該教師也忽略了每個人的教學能力不一樣，這和每一顆黑棋與白棋被抽到的機率相同的狀況不同，而做錯誤的類比。所以，明明算出來機率相等，他還是受生活經驗的影響，而選擇了乙袋抽到黑棋的機率較大。由此可以看出在知識和生活經驗的競爭下，這位教師視生活經驗重於知識，而選擇生活經驗作為解題的主要依據。（3）知識或直觀重於生活經驗：在生男生女機率問題中，有 1 位教師除了考慮機率知識或直觀而回答“以機率上來說是相等”外，同時也考慮到生活經驗，如身體健康情況...等問題，但他最後仍是選擇知識或直觀為解題依據。由此可以看出在知識或直觀和生活經驗的競爭下，該位教師視知識或直觀重於生活經驗，而選擇知識或直觀作為解題的主要依據。

3.國小教師對於同一試題的回答理由，可能隱含了二種不同的直觀規律。以黑棋白棋機率問題為例，部分教師受直觀規律 More A – More B 的影響，以黑棋數目大小為依據，而認為乙袋的機率較大；但也有部分教師受到直觀規律 Same A – Same B 的影響，認為兩袋都含黑棋和白棋，所以兩袋的機率相等。因此，同一個數學問題的解題，可能隱含了二種不同的直觀規律。

二、建議

以下針對研究結果對來研究方向提出幾點建議：

1.國小代課教師是根據直觀、知識或生活經驗這三個因子解數學問題。解題的過程可能只包含單一因子，有時可能同時包含二個或三個不同的因子彼此競爭從事解題。但這些因子是如何彼此競爭與孰能勝出的過程卻尚未了解；同時，是否還有其它因子影響教師解題。另外，研究只出現三者彼此競爭的情形，是不是可能由三者彼此合作而解題，建議日後研究能針對這些問題做進一步探討。

2.國小教師解計算愈簡單的題目受直觀規律的影響愈小；解計算愈複雜的題目，受直觀規律的影響也愈大，但無法透過計算解題的題目受直觀規律的影響最大。可見解題時計算的難易及能否透過計算解題可能是影響教師使用直觀規律解數學問題的重要因素，建議研究能針對

是否能透過計算解題與計算的難易程度做研究設計，加以深入探討與再驗證。由於本研究以筆測方式收集資料，而〝直觀〞具有立即性，常常是在解題的第一時間出現，因此，〝時間〞因素對使用直觀規律解題的影響爲何？除此之外，是否還有其它因素影響教師以直觀規律解數學問題？這些問題都有待日後繼續研究。

3.國小教師解數學問題的過程在直觀、知識和生活經驗三者的競爭下，呈現直觀重於知識、生活經驗重於知識、知識或直觀重於生活經驗三種情形，國小代課教師的解題表現呈現出當直觀與另外二個因子競爭時，直觀都是重於知識或生活經驗，並沒有發現知識和直觀同時出現而知識重於直觀的情形，也沒有發現生活經驗和直觀同時出現而生活經驗重於直觀的情形。是不是當直觀出現時，一定重於其它因子，或者是當直觀與知識因子競爭時，直觀因子的想法立刻被否定，因此問卷上只呈現知識的解題過程，所以我們無法發現知識重於直觀的情形？這些都是值得未來研究做進一步驗證與探討。

參考文獻

呂玉琴（1991）：影響分數二分之一概念的因素：個案分析。**國民教育，第 31 卷第 11, 12 期**，16～21。

呂玉琴（1994）：**國小教師分數教學之相關知識研究**。國立台灣師範大學科學教育研究所博士論文。

林福來（1990）：**比例概念深層結構的了解（Ⅱ）**。行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告，NSC-79-0111-S-003-13A。

謝展文(2000)：**直覺法則對於數學及科學學習的影響－以國小四、五、六年級學爲對象**。國立臺灣師範大學科學教育研究所碩士論文。

陳秀雯（2002）：**師院生佈乘法文字題之研究**。國立台北師範學院數理教育研究所碩士論文。

Feller, W. (1957). *An introduction to probability theory and its applications*. Vol. 1, John Wiley & Sons, New York.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an Educational Approach*. The Netherlands: Reidel.

Hahn, H. (1956). The crisis in intuition. In J. R. Newman (Ed.). *The World of Mathematic*, Simon and Schuster, New York, 1957-1976.

Hersh, R. (1998). *What is mathematics, really?* London, Vintage Books.

Kant, I. (1980). *Critique of pure reason* (Translated by N. K. Smith). The Macmillan Press Ltd. London.

Mendel, N. (1998).*The intuitive rule "same A – same B": The case of comparison of rectangles.* Unpublished manuscript. Tel Aviv University, Israel.

Pitkethly, A., & Hunting, R. (1996). A review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educational Studies in Mathematics, 30, 5-38.*

Spinoza, B. (1967). *Ethirc and treatise on the correction of the understanding* (Translated by A. Boyle). Everyman's Library Dent: London.

Stavy, R., & Tirosh, D. (1996). Intuitive rules in mathematics and science: The case of "the more of A the more of B". *International Journal of Science Education, 18,* 653-667.

Stavy, R., Tirosh, D., Tsamir, P., & Ronen, H. (1996). *The Role of Intuitive rules in science and mathematics Education.* Unpublished thesis. School of Education, Tel-Aviv University, Israel.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teacher's knowledge of children conception: The case of division of fraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 31(1),* 5-25.

Tirosh, D., & Stavy, R. (1999). The Intuitive Rules Theory and Inservice Teacher Education. In F. L. Lin (Ed), *Proceedings of the 1999 International Conference on Mathematics Teacher Education.* Department of Mathematics, National Taiwan Normal University: Taipei, Taiwan, 205-225.

The Influence of Intuitive Rules in Solving Mathematics Problems Upon Elementary School Substitute Teachers

Yuh-Chyn Leu[1] Ruey-Fa Chern[2]

[1]National Taipei Teachers College,
Department of Mathematics Education
[2]Min An Elementary School, Taipei County

Abstract

The purpose of this research is to investigate how intuitive rules influence substitute teachers when they solve mathematics questions. The research subjects were forty elementary school teachers without license. The research method was a 50-minute paper-and-pencil test.

The research results include: (1) The elementary school substitute teachers were influenced by two intuitive rules when solving problems, More A-More B and Same A-Same B. (2) Some teachers would consider three aspects when solving problems, which are knowledge, experience, and intuitive rules. These three elements would compete against one another. One of the three would become dominant and be the basic principle in problem-solving. (3) Calculation may be the main factor that influenced teachers to apply intuitive rules in problem-solving. This outcome may be attributed from the fact that research subjects had enough time to solve problems by calculation.

Some suggestions would be presented according to the research results.

Key words: Intuitive Rules, Elementary School Substitute Teachers, Mathematics