論乘除運算中有效數字之處理規則

陳韋達　李 偉

中原大學物理系

（投稿日期：93 年 6 月 24 日；修正日期：93 年 12 月 10 日；接受日期：93 年 12 月 23 日）

摘要

乘除運算是十分常見的四則運算，在吾人求學過程中，多數教科書上都提供一標準規則來處理乘除運算中之結果的有效數字。然而，教科書奉為圭臬的標準規則的數學基礎為何？該規則真的合理嗎？其成功率又是幾成呢？是否有其他更好的規則存在？針對以上的問題，我們利用簡單的數學分析並透過蒙地卡羅模擬，仔細研究了乘除運算中三種有效數字的處理規則，並找出了最適切的取捨規則以供乘除運算之需。

關鍵詞：數學教育、理化教育、自然科學

壹、緒論

中小學學生在學習數學與自然科學的過程中，常需要處理乘除運算。這些學生常會遇到類似的問題，例如：求一平均運動速率爲 3.27 公尺/秒的物體歷經 5.7 秒所行進的距離。若吾人利用計算機來演算 3.27×5.7，則會發現計算機上所顯示的結果爲 18.639，並直接記錄答案爲 18.639 公尺。然而如此記錄答案並不正確！較合理的記錄方式應爲 19 公尺。有效數字代表一數的精密度；有效數字位數越多，代表該數越爲精密。在上例的運算中，速率具有三位有效數字，時間具有兩位有效數字，而距離乃由速度與時間相乘而得，其結果自然不可能比速度或時間還要來得更加精密，是故距離所具有的有效數字位數不可能比速度或時間所具有的有效數字位數還多。基於上述的邏輯推演，多數教科書都提供了一個乘除運算有效數字的標準取捨規則：即，兩量相乘（或相除），其結果所具有的有效數字位數應與兩量中具較少有效數字位數者相同。此一規則在邏輯上似乎是十分合理的，但是否存在有嚴謹的數學基礎來支持此一法則呢？抑或吾人能否檢測此規則的正確性呢？本文便針對此這兩個問題作深入的研究與探討。

貳、文獻探討

研究有效數字處理規則（Schwarts, 1985; Stieg, 1987; Schwarts, 1987; Abel & Hemmerlin, 1990; Clase, 1993）之相關文獻並不多見，也因此多數教科書針對乘除運算所提供之標準取捨規則一直被吾人奉爲圭臬（邱鴻志，1999）。標準取捨規則的理論基礎更鮮少見於文獻，眾裡面尋她千百度，作者近十年來也只能找到僅有的粗略導式（Shchigolev, 1965）。然而教科書中的標準取捨規則真的無懈可擊？Schwarts（1985）曾以一特例（$x = y^n$，n 爲整數）預估利用標準取捨規則來決定乘法運算結果所應保留的有效數字，其研究發現只有 37.0%–63.3%的機率是正確的；而 Good（1996）也曾在美國物理教師協會所出版的《物理教師》中撰文警告，該乘除運算的標準取捨規則僅僅只有 30%–50%的機會能夠保有結果的精密度！Mulliss & Lee（1998）則更進一步挑戰在數學與科學教育界行之有年的教學內容，他們結合簡單之數學理論與蒙地卡羅模擬的量化分析，闡明了教科書上的標準取捨規則是相當不可靠的；在同一論文中，他們也提出了一個替代方案來取代現有的標準取捨規則。

參、有效數字與誤差遞移

一、有效數字

假設吾人使用最小刻度爲 0.1 公分的尺來測量某物體的長度，其結果記錄爲

8.15 公分，稱爲測量值。前二位 8.1 是直接讀出的，稱爲準確值，而最末一位 0.05 則是從尺上最小刻度之間估計出來的，稱爲估計值—雖然是估計的，但還是有一定根據，所以是有意義的；而測量值的有效數字便是一組準確值再加上一位估計值，所以 8.15 公分一共有三位有效數字。然而，此處之百分位數字「5」已經是估計而得的，故使用這隻尺來進行任何測量所得到的結果都不可能比百分位更準確。由此可見，有效數字的多少，也間接表示了測量所能夠達到的精密程度（precision），顯然這與所用的測量工具有關。

爲了正確地理解有效數字的概念，吾人應注意以下幾種情況（杜先智，1994）：

1. 末位爲「0」和數字中間出現的「0」都屬於有效數字。例如一磅秤的讀數爲 1.50 公斤重，這表明測量已達到 0.01 公斤的程度，它與 1.5 公斤重是不同的，後者表示測量只進行到 0.1 公斤的程度。此處之區別表現爲前者是三位有效數字，後者是兩位有效數字。
2. 小數點前出現的「0」和它之後緊接的「0」，都不算有效數字。例如 0.61 或 0.061 或 0.0061 都只有兩位有效數字。
3. 有效數字的標準形式是以 10 的冪次來表示其數量級，冪次前面的數字是測量的有效數字（常於小數點前取一位數字），即所謂的科學記號（scientific notation）。例如 0.0543 公尺，若寫成標準形式，應是 5.43×10^{-2} 公尺。在單位換算時，尤其應採用標準形式，才不會使有效數字有所增減。

我們可利用下列規則來決定任一測量結果之有效數字位數（Bevington & Robinson, 1992）：

1. 最左邊非零的數字，爲最有意義的數字。
2. 如果無小數點，最右邊非零的數字，爲最小意義的數字。
3. 如果有小數點，最右邊的數字（即使是 0），爲最小意義的數字。
4. 計算介於最有意義與最小意義數字之間的數字個數，即爲此一測量結果的有效數字位數。

例如，下列數字皆爲四位有效數字：1234、123400、123.4、1001、1000.、10.10、0.0001010、100.0。

二、有效數字與誤差

若一測量結果具有三位有效數字，如 8.15，則此記錄結果可能由介於 8.145 與 8.154999 之間的數字於百分位之下一位作四捨五入而得，因此，吾人可將其誤差（error）視爲 ±0.005；換言之，透過有效數字的認定，吾人可將一數 x 之誤差 Δx 視爲該數之最小意義數字所在位數的二分之一。例如，520、348 與 6.58 之誤差分別爲 ±5、0.5 與 0.005。若吾人將一數 x 之誤差 Δx 表示成 0.5×10^{P_x}，並定義 P_x 爲該數之不準確位數值，則吾人可得：若一數之最小意義數字

在個位，其不準確位數值爲 0；若一數之最小意義數字在十位，其不準確位數值爲 1；若一數之最小意義數字在十分位，則其不準確位數值爲 −1，餘類推。

爲了方便討論，我們定義一數 x 之精密度（Precision (x)）爲其誤差 Δx 與該數 x 之比值，以百分比的形式表示之：

$$\text{Precision } (x) \equiv \left|\frac{\Delta x}{x}\right| \times 100\%$$

現考慮四組數字，將其以科學記號表示爲 $x = a_x \times 10^n$（其中 $1 \le a_x < 10$，n 爲一整數），並分別寫出其誤差 Δx、不準確位數值 P_x、有效數字位數 N_x 與精密度，列於表一中。由表一中我們可以很輕易地得到有效數字位數與精密度之間的關係爲（Mulliss & Lee, 1998）

$$\text{Precision } (x) = C_x \cdot 10^{(2-Nx)}\ \% \tag{1}$$

其中，C_x 爲一常數。此外，我們還可以得到下列的關係式

$$P_x = 1 + n - N_x \tag{2}$$

透過此一關係式，吾人可得

$$\begin{aligned}\frac{\Delta x}{x} \times 100\% &= \frac{0.5 \times 10^{P_x}}{a_x \times 10^n} \times 100\% \\ &= \frac{0.5 \times 10^{1+n-N_x}}{a_x \times 10^n} \times 100\% \\ &= \frac{5}{a_x} \times 10^{(2-N_x)}\%\end{aligned}$$

與精密度之定義兩相對照後，吾人立即可得

$$C_x = \left|\frac{5}{a_x}\right| \tag{3}$$

由公式 (3)，我們可輕易得出 C_x 範圍在 $0.5 < C_x \le 5$。

表一：數值精密度與有效數字位數之間的關係。

x	a_x	n	N_x	P_x	Δx	精密度	C_x
60	6	1	1	1	0.5×10^1	0.83×10^1	0.83
72	7.2	1	2	0	0.5×10^0	0.69×10^0	0.69
64.4	6.44	1	3	–1	0.5×10^{-1}	0.78×10^{-1}	0.78
92.37	9.237	1	4	–2	0.5×10^{-2}	0.54×10^{-2}	0.54

三、乘除運算之誤差遞移

考慮一乘法運算 $z = x \cdot y$，對應於自變數 x 與 y 的不準度Δx 與Δy，應變數 z 所俱有的不準度Δz，可輕易地透過簡單的微分法則而求得其誤差遞移的方式爲 [5]

$$\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y = y\Delta x + x\Delta y$$

即

$$\left|\frac{\Delta z}{z}\right| \approx \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y}\right|$$

而就除法運算 $z = x/y$ 而言，吾人可得

$$\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y = \frac{\Delta x}{y} - \frac{x\Delta y}{y^2}$$

或

$$\left|\frac{\Delta z}{z}\right| \approx \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y}\right|$$

也就是，不論是乘法或除法運算，誤差遞移的方式皆爲

$$\text{Precision }(z) \approx \text{Precision }(x) + \text{Precision }(y)$$

然而，此一誤差遞移公式乃適用於當相乘或相除的兩量彼此間有著高度的相關性時。一般而言，相乘或相除的兩量是彼此獨立的（例如，速度與時間乃分別由兩種不同的儀器所測得，故彼此間應是獨立的），因此利用變異數（variance）與協方差（covariance）的概念，吾人可得乘法或除法運算的一般誤差遞移方程式（Bevington & Robinson, 1992; Taylor, 1997）

$$[\text{Precision }(z)]^2 \approx [\text{Precision }(x)]^2 + [\text{Precision }(y)]^2 \tag{4}$$

肆、乘除運算有效數字處理規則之數學基礎

一、標準取捨規則

針對一乘法或除法問題 $z = x \cdot y$ 或 $z = x/y$，假設 x 具有 N_x 位有效數字且 y 具有 N_y 位有效數字，而 z 具有 N_z 位有效數字，則根據上述的誤差遞移方程式，並將精密度與有效數字位數之關係式 (1) 代入方程式 (4) 中，

$$\left(C_z \cdot 10^{2-N_z}\right)^2 \approx \left(C_x \cdot 10^{2-N_x}\right)^2 + \left(C_y \cdot 10^{2-N_y}\right)^2$$

兩邊展開，同時取對數

$$2\log(C_z) + 4 - 2N_z \approx \log\{10^4[(C_x)^2 \cdot 10^{-2N_x} + (C_y)^2 \cdot 10^{-2N_y}]\}$$

若假定 N 爲 N_x 與 N_y 中較小者，N'爲 N_x 與 N_y 中較大者，C 與 C'則爲根據誤差關係式 (1) 所對應的常數，則

$$\begin{aligned}2\log(C_z) + 4 - 2N_z &\approx \log\{10^4[C^2 \cdot 10^{-2N} + C'^2 \cdot 10^{-2N'}]\} \\ &\approx 4 + \log\{10^{-2N}[C^2 + C'^2 \cdot 10^{-2(N'-N)}]\} \\ &\approx 4 - 2N + \log[C^2 + C'^2 \cdot 10^{-2(N'-N)}]\end{aligned}$$

整理後，吾人可得

$$N_z \approx N + \left\{ \log(C_z) - \frac{1}{2}\log\left[C^2 + C'^2 \cdot 10^{-2(N'-N)}\right] \right\} \tag{5}$$

顯然，教科書上常見的標準取捨規則似乎也具理論基礎，只是爲了簡單起見，該法則忽略了後面大括號中所包含的數值，而逕自採用了 $N_z = N$ 的規則，即，兩數的成績結果所具有的有效數字位數 N_z 要與兩量中具較少有效數字位數者 N 相同。因此，根據標準取捨規則，5.7×3.27 的結果應記錄爲 19。

二、穆李規則

Mulliss & Lee（1998）透過統計的手法，仔細檢驗了方程式 (5) 等號右邊第二項（即大括號中所包含的數值）的貢獻，其結果發現 N_z 可能的狀況有 $N_z = N - 1$、$N_z = N$ 與 $N_z = N + 1$ 三種狀況。因此，他們提出了一替代的規則爲 $N_z = N + 1$，也就是兩數相乘或相除，其結果所具有之有效數字位數應比標準規則所預測的多一位，理由是多記載的這一位並非完全沒有意義，雖然不能完全確定，該數值帶有特定有用的精密資訊；試想，科學家窮畢生精力爭取政府研究經費作科學研究，很可能只是爲了要找出某一物理常數—如光速—的正確值，哪堪研究助理在處理數據過程中任意丟棄並非完全沒有意義的一個尾數。若根據穆李規則，5.7×3.27 的結果應記載爲 18.6。

三、陳李穆規則

除了上述兩種規則之外，若吾人將相乘或相除的兩數中具有較少有效數字者以科學記號表示成 $a \times 10^n$，將具有較多有效數字者表示成 $a' \times 10^{n'}$，則吾人可透過關係式 (3)，進一步將公式 (5) 再改寫成

$$\begin{aligned}
N_z &\approx N + \left\{ \log(C_z) - \frac{1}{2}\log\left[C^2 + C'^2 \cdot 10^{-2(N'-N)}\right] \right\} \\
&= N + \left\{ \log\left(\frac{5}{a_z}\right) - \frac{1}{2}\log\left[\left(\frac{5}{a}\right)^2 + \left(\frac{5}{a'}\right)^2 \cdot 10^{-2(N'-N)}\right] \right\} \\
&= N + \left\{ \log(5) - \log(a_z) - \frac{1}{2}\log\left[(5)^2 \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a'^2} \cdot 10^{-2(N'-N)}\right)\right] \right\} \\
&= N + \left\{ \log(5) - \log(a_z) - \log(5) - \frac{1}{2}\log\left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a'^2} \cdot 10^{-2(N'-N)}\right] \right\}
\end{aligned}$$

整理可得

$$N_z \approx N + \left\{ -\log(a_z) - \frac{1}{2}\log\left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a'^2} \cdot 10^{-2(N'-N)}\right] \right\} \tag{6}$$

當 $N' > N$ 時，$10^{-2(N'-N)}$ 最大爲 0.01，故公式 (6) 可簡化成

$$N_z \approx N + \left\{ -\log(a_z) - \frac{1}{2}\log\left[\frac{1}{a^2}\right] \right\} = N + \left\{ -\log(a_z) + \log(a) \right\}$$

或

$$N_z \cong N + \log(a / a_z), \qquad (N' > N) \tag{7}$$

同樣地，當 $N' = N$ 時，$10^{-2(N'-N)}$之值爲 1，則公式 (6) 可簡化爲

$$\begin{aligned} N_z &\approx N + \left\{ -\log(a_z) - \frac{1}{2}\log\left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a'^2}\right] \right\} \\ &= N + \left\{ -\log(a_z) - \tfrac{1}{2}\log\left[\frac{1}{a^2}\left(1.0 + \frac{a^2}{a'^2}\right)\right] \right\} \\ &= N + \left\{ -\log(a_z) + \log(a) - \tfrac{1}{2}\log[1.0 + (a/a')^2] \right\} \end{aligned}$$

或

$$N_z \approx N + \log(a / a_z) - \tfrac{1}{2}\log[1.0 + (a/a')^2\}, \qquad (N' = N) \tag{8}$$

顯然，a 可近似爲有效數字位數較少的數字之前導數字（即一數最左邊的數字），a'可近似爲有效數字位數較多的數字之前導數字。

在 $N' > N$ 的狀況中，考慮 a_z 與 a 之可能值，如表二所列，結合公式 (7) 與表二所提供的 $\log(a/a_z)$ 之數值，我們可以很清楚地看出來，隨著 a 變大，N_z 會越來越趨向於 $N + 1$。此外，當 $a \geq 5$ 時，$\log(a/a_z)$ 之值大多大於零，以致使結果較傾向於 $N_z = N + 1$。

對於 $N' = N$ 的狀況而言，$-(1/2)\log[1.0+(a/a')^2]$ 一項會隨著 a 之值的增加而趨向一更負的數；然而，隨著 a 值之增加，$\log(a/a_z)$ 增大的速率比 $-(1/2)\log[1.0+(a/a')^2]$ 減小的速率來得大，因此，在 $N' = N$ 的狀況下，我們還是可以推論：當 $a \geq 5$ 時，應當採用 $N_z = N + 1$，但顯然其成功或正確率將不如 $N' > N$ 的情況。仔細研究公式 (8)，我們可以發現當 a 與 a' 兩者同時大於 5 時，才能使得 N_z 趨向於 $N + 1$ 的機會大於 50%。

從以上的討論，吾人可歸結出一個新的替代方案（以下簡稱爲陳李穆規則）：

(1) 乘除運算中，當兩量具有不同之有效數字位數時，若兩量中具有較小有效數字位數者之前導數字大於或等於 5 時，結果之有效數字位數要比兩量中較少者多一位，否則結果之有效數字位數須與兩量中較少者相同。

(2) 乘除運算中，當兩量具有相同之有效數字位數時，若當兩量之前導數字皆大於或等於 5 時，結果之有效數字位數要比兩量之有效數字位數多一位，否則結果之有效數字位數須與兩量相同。

此一規則可以簡化爲：

乘除運算中，若一數之前導數字大於或等於 5 時，該數之有效數字位數要多加一位，再利用標準規則來判斷結果之有效數字位數。

舉例來說，5.7 × 3.27 應記錄爲 18.6，3.7 × 5.86 應記錄 22，3.7 × 5.8 應記載爲 21，而 6.8 × 5.9 則應寫成 40.1（Chen, Lee & Mulliss, 2004）。

表二：前導數字對於運算結果之有效數字位數之貢獻。

前導數字 *a*	$\log(a / a_z)$項之可能值		
	最小值	平均值	最大值
1	–0.954	–0.699	+0.000
2	–0.653	–0.398	+0.301
3	–0.477	–0.222	+0.477
4	–0.352	–0.097	+0.602
5	–0.255	+0.000	+0.699
6	–0.176	+0.080	+0.778
7	–0.109	+0.146	+0.845
8	–0.051	+0.204	+0.903
9	+0.000	+0.255	+0.954

伍、統計分析

我們撰寫 FORTRAN 90 程式，經由蒙地卡羅的過程，利用 *Microsoft Fortran PowerStation*（Version 4.0）的編譯器（compiler），在 MS-Windows XP 的環境下，以 Pentium(R) 4, 1.6GHz 之個人電腦執行隨機取樣與測試統計，其中各組運算中的兩數乃藉助 *Numerical Recipes in FORTRAN* 一書所提供的亂數產生程式—*Ran2* 所產生（Press, Teukolsky, Vetterling & Flannery, 1992），百萬組測試的統計結果如表三所示。

顯然在乘除運算上，經百萬組數字統計測試後發現，大多數教科書都能接受的有效數字標準取捨規則（標準法則）其準確性只達四成，而有近六成機率會損失數字的精密度。也就是說，對於乘除運算而言，大多數的例子會遺失數字所含有用的資訊，該結果印證了 Good（1996）所提出的警告。

按「標準取捨規則」規定再多加一位有效數字的替代規則—穆李法則，其準確度比「標準取捨規則」高很多且沒有少估的情形產生，也就是說它完全不會有損失數字精密度的危險。雖然此規則多估一位或二位有效數字的情形與取捨規則的原意相違背，但是站在保留數字資訊、不損失數字精密度的立場上，多加一位的取捨規則是相當合適的。

表三：標準規則、穆李規則與陳李穆規則之統計分析。

分類	乘法	除法	平均
	標準規則		

少估一位	68.79%	54.38%	61.58%
估計正確	30.97%	45.32%	38.15%
多估一位	0.24%	0.30%	0.27%
穆李規則			
少估	0	0	0
估計正確	68.82%	54.71%	61.765%
多估	31.18%	45.29%	38.235%
陳李穆規則			
少估一位	26.97%	16.95%	22.00%
估計正確	62.02%	68.99%	65.50%
多估一位	11.01%	14.06%	12.50%

經由我們的研究和實際進行蒙地卡羅的百萬亂數統計所得之結果，我們發現陳李穆規則在乘除運算中，有高達 65.50% 的機率是屬於估計正確的。儘管此一規則約有兩成的機率會造成少估一位的狀況，即有遺失數字資訊的風險，但站在提升精確度的立場上，此規則不失爲一適切的方法來處理乘除運算中之有效數字。

顯然，在乘法上，陳李穆規則與穆李規則的正確估計的百分比相去不遠，但是在除法上的統計結果卻大大不同。在除法上，陳李穆規則的精確度顯然大大地提升了超過 10%，因此平均起來比起穆李規則，精確度提升了。但是值得注意的是，採用陳李穆規則會產生少估一位的情形，也就是說使用陳李穆規則具有失去數字資訊的風險存在。對於穆李規則而言，它完全沒有少估的情形發生，亦即多加一位有效數字並不存在損失精密度的可能。

不論是穆李規則或陳李穆規則，其精密度比起標準法則都大爲提升，然而究竟是該使用陳李穆規則或穆李規則來處理乘除運算中的有效數字呢？這個問題的答案很顯然是見仁見智的。雖然陳李穆規則在除法的準確度最高，但是卻有著少估一位—也就是失去有用的數字資訊—的風險；而穆李規則儘管在精密度上稍有不如陳李穆規則之憾，但是卻完全沒有喪失數字資訊的危險存在。魚與熊掌無法兼得之時，兩害相迫取其輕，我們認爲保護數字資訊是更爲重要的，因此我們建議學生應該使用穆李規則來處理乘除運算中的有效數字，當然使用者也可以根據實際狀況與需求來決定應當使用陳李穆規則或穆李規則。

陸、結論

一測量之物理量的完整表示方式，理論上必須包含準確值與誤差量。然而，爲了記錄方便，吾人通常只選擇記錄將儀器所能及的最小精密位數之下一位經四捨五入處理後所得之數值，此時，有效數字的概念就佔了很重要的地位。若吾人能擅用有效數字的概念，則有效數字便可間接提供我們誤差的訊

息，因此有效數字在四則運算時取捨規則的準確性便顯得非常重要。

經由作者仔細的研究發現：多數教科書對乘除運算所提供之標準規則是十分不精確的，其成功率只達四成，而有六成的機率損失數字資訊，對精密度造成傷害。針對此一問題，Mulliss & Lee（1998）提出了一新的規則—穆李規則，經由統計證實，此規則有超過六成的成功率。另外，我們也提出了一個新的規則—陳李穆規則，而此一規則的成功率也是超過六成的（Chen, Lee & Mulliss, 2004）。

雖然穆李規則與陳李穆規則皆有超過六成的成功率，但是由於穆李規則不會對數字造成傷害，因此我們建議對於乘除運算之有效數字處理規則應當採用穆李規則，即比標準規則還要多加一位有效數字！

參考資料：

杜先智（1994）：**數學在中學物理中的應用**。中原大學應用物理研究所碩士論文。

邱鴻志（1999）：**四則運算中有效數字的處理法則**。台北：九章出版社，頁12–16。

Abel, K.B. & Hemmerlin, W.M. (1990). Significant figures. *J. Chem. Educ. 67(3)*, 213.

Bevington, P.R. & Robinson, D.K. (1992). *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*. New York: McGraw-Hill, p. 5.

Chen, W.-D., Lee, W. & Mulliss, C.M. (2004). On various kinds of rounding rule for multiplication and division. *Chin. J. Phys. 42(4-I)*, 335–346.

Clase, H.J. (1993). More on the question of significant figures. *J. Chem. Educ. 70(2)*, 133.

Good R.H. (1996). Wrong rounding rule. *Phys. Teach. 34(3)*, 192.

Mulliss, C.M. & Lee, W. (1998). On the standard rounding rule for multiplication and division. *Chin. J. Phys. 36(3)*, 479–487.

Schwartz, L.M. (1985). Propagation of Significant Figures. *J. Chem. Educ. 62(8)*, 693–697.

Schwartz, L.M. (1987). Rules for propagation of Significant Figures (LTE). *J. Chem. Educ. 64(5)*,471–472.

Shchigolev, B.M. (1965). *Mathematical Analysis of Observations*. London: Iliffe Books, p. 22.

Stieg, S. (1987). Rules for propagation of Significant Figures (LTE). *J. Chem. Educ. 64(5)*,471.

Taylor, J. R. (1997). *An Introduction to Error Analysis: The Study of Uncertainties in Physical Measurement* (2nd ed.). Sausalito, California: University Science Books, pp. 30–31.

On the rounding rules for multiplication and division

Wei-Da Chen   Wei Lee

Department of Physics, Chung Yuan Christian University

Abstract

Multiplication and division are commonly encountered as two of the four fundamental operations. Most textbooks provide a standard rounding rule for multiplication and division, allowing students in schools to follow to deal with the significant figures of the results. However, what is the fundamental basis of the standard rule? Is the rule reasonably accurate? How good is the standard rule? Do there exist any other superior rules? A detailed investigation of three different rounding rules for multiplication and division is presented including statistical analyses via Monte-Carlo simulations as well as a mathematical derivation. We compare carefully different rounding rules for multiplication and division and suggest a best one to be adopted as the standard.

Key words: mathematics education, physics and chemistry education, natural science