東方魔板、分數與解題之連結教學活動的研究

楊德清[1]　黃志敘[2]

[1]國立嘉義大學數學教育研究所

[2]雲林縣台西國民小學

（投稿日期：94 年 1 月 10 日；修正日期：94 年 1 月 20 日；接受日期：94 年 1 月 24 日）

摘　要

本研究之主要目的乃是將七巧板融入分數單元之教學活動，以探討小六兒童常見之分數迷思概念、解題策略與教學後之迷思概念和解題策略改變情形。因此，本研究採立意取樣選取某縣市某一中型小學六年級之一班學生，共 32 位參與本研究。

結果顯示小六兒童常見之分數迷思概念為：1. 不知分數為何物；2. 無法釐清「部分~全體」的關係；3. 缺乏等分概念等三種。兒童多元的解題策略為：1. 善用參考點 ~ 以最小單位為單位量做基礎，2. 以小方格為單位進行解題，3. 選擇適當大的單位當作參考點，以及 4. 使用實際測量方式解題等 4 種策略。

同時，教學後之評量顯示有將近 1/3 的學生從原本錯誤的解題策略中修正為正確解法，顯示本活動對學生的學習具正面幫助，而且可以有效地幫助兒童發展正確的解題策略。

關鍵詞：七巧板、分數、解題策略、迷思概念

壹、研究動機與目的

「七巧板」一般人以為較適用於低年級發展幾何概念的輔助教具，高年級便不需要；如果高年級還需借助七巧板，便會顯得很幼稚。然而研究者卻有不同想法，七巧板可以是一種良好的輔助學習工具，藉由它的使用，能夠幫助學生發展更深入的數學概念。根據文獻的記載七巧板起源於我國宋朝的益智拼圖板，最早稱「燕几圖」，它是由一個正方形分割成七塊圖形，經由七巧板的排列組合，可以拼成各種人物、花卉、動物等有趣的圖案（南一書局，2004）。此外，何鳳珠（2004）也認為七巧板是一種很好的教學素材。雖然它的構造不過是幾塊簡單的幾何圖板，卻能創造出千變萬化的造型，同時也常被用來幫助孩子學習基本圖形。因此，七巧板在數學之應用是相當多元的，藉由它所具備的特性，將其融入教學中，不失為學習分數概念的好教材。因此本研究將以七巧板之幾何特性連結分數教學活動，藉由學生解題的過程中了解學生的想法、迷思概念與解題策略。

基於此，本活動的主要目的乃是希望藉由七巧板的幾何特性，設計問題情境，以引導兒童從察覺－>轉化－>解題－>溝通－>評析中進行解題活動，並增進數學內部知識—幾何圖形、面積與分數概念之連結，進而發展穩固的分數概念。因此，本研究之目的有二：

一、在七巧板教學活動前，探討小六兒童之分數迷思概念與多元解題策略。

二、在七巧板教學活動後，探討小六兒童分數迷思概念及解題策略之改變情形。

貳、文獻探討

本文獻探討分三部份：首先探討與本活動相關之兒童常見分數迷思概念；其次探討兒童解題與溝通之相關研究；最後分析以七巧板為主軸之連結活動的相關研究。分述如下：

一、兒童常見分數迷思概念之相關研究

Kamii(1994)與 Post, et al.(1992)等人之研究指出學生學習分數時大抵依賴教師所傳授之演算法則解決問題，只是機械性地操弄符號，並非真正地理解分數概念。以下針對與本研究有關之分數迷思概念作進一步之探討：

（一）不知分數為何物：小二下學期之後分數單元在數學課程中即佔有相當重要的角色，但分數概念的學習與應用，卻是國小數學課程中最困難的部份（Southwell,1985）。的確，許多的研究（Behr, et al., 1984;Cramer,et al,2002; Empson, 2003）即指出由分子與分母所組成之分數對兒童而言是既抽象又難理解。

（二）部分~全體的迷思：國小學習分數大抵透過圖形方式來認識部分~全體的關係，部分為分子（a），全體為分母（b），將部分佔全體幾分之幾以分數$\frac{a}{b}$表徵之。然而許多學生卻不瞭解分數的意義，在處理分數問題時會將$\frac{a}{b}$視為兩個獨立的個體，未能將分數視為一個數（Behr, et al., 1984; Cramer, et al., 2002; Kerslake, 1986; Hart,1988; Post, et al., 1992）。

（三）缺乏等分概念：很多兒童在處理分數問題時，往往忽略「等分」的概念（Bergeron et al, 1987）。呂玉琴（1991）曾針對國小四~六年級學童進行分數概念研究發現約有 30％的四~六年級學生在連續量中缺乏等分概念。同時研究者個人之教學經驗亦顯示部分兒童由於缺乏等分的概念，因此造成兒童往後之解題困境。

二、兒童解題與溝通之相關研究

相關的研究與報告（NCTM, 2000；Schoenfeld,1994；Silver, 1985）均強調解題是數學教育的重要主題之一，因此，培養孩子解題能力已被當前數學教育家視為學習數學的焦點。例如美國數學教師協會（NCTM, 2000）之課程標準即指出解題的重要，並強調所有學生能夠透過解題建立新的數學知識、解決情境中所產生之問題、發展多樣策略以解決問題與監督和反思解題過程。

解題在學習數學的重要性已受重視，但該如何解題呢？如何擺脫傳統「老師演示，學生模仿」之被動獲得數學知識的模式呢？以建構為取向的數學教師從事教學時會採取「教師佈題－＞學生解題－＞溝通討論－＞質疑辯證－＞形成共識」的教學步驟（黃敏晃 1994；鄔瑞香 1994）。通常以小組合作學習之方式進行教學時，老師扮演的角色是佈題、溝通及協助者而不是解題者。多位學者亦證實小組討論與課室發表（Empson, 2003；Fuson, Carroll & Drueck, 2000；Yang, 2003）有助於兒童的解題活動。因此，本研究之教學，教師依教學目標佈題，學生則分組進行討論，最後藉由發表分享彼此討論後的結果，由內向外擴散連結新舊經驗。

三、以七巧板為主軸以進行連結活動之理念

分數的原始概念來自於幾何概念（引自 Sobel & Maletsky,1988）。分數的教學和幾何概念關係密切，且一些研究報告（Baroody, 1987;Heddens, 1984;NCTM, 2000）顯示藉由實體的操作有助於強化分數概念，所以將七巧板運用在教學上亦可增進兒童抽象概念的理解。van Hieles（1986）認為七巧板活動和摺紙、畫圖一樣，可以豐富兒童的視覺，發展幾何圖形的知識，也可以從一個層次提昇到另一層次。因此，本活動的教學設計是以七巧板為教具來連結兒童分數概念學習，以促使學生將所學幾何知識及分數概念做連結。

參、研究方法

本研究採個案研究法，藉由分組討論、工作單、數學日誌以及課室討論中所蒐集資料，進行分析，以達本研究之目的。

一、研究對象：

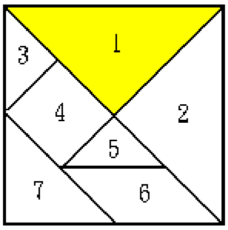
本研究以某縣沿海一中型小學六年級之某班學生為研究對象，班上共 32 位學生。全班共分成十六組，每組編碼分別為 P1、P2、P3……P16，每組有二人。P1（S1，S2）之 P1：代表第一組，S1：代表學生，依此類推。學生家長之背景大部分是從事農、漁業，少部分是公、商業，家長社經地位差異並不大，但是學生

在數學成績表現則差異頗大。

二、研究工具：

(1)活動一~第一塊板子的故事

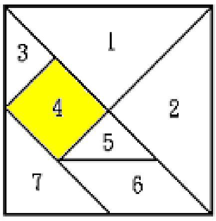
小朋友，下列七巧板之編號 1 的板子的面積佔全部面積的多少？



利用 1 號板子做為佈題的情境，讓學生發揮想像力以進行解題活動。

(2)評量活動：透過再佈題以檢驗學習成效

小朋友下列編號 4 的板子的面積佔全部面積的多少？



三、資料之蒐集、整理與分析

本研究資料來源包括：(1) 教學者的教學過程記錄，本教學記錄包含了學生之分組討論，課室討論，教師如何適時地進行引導討論活動的進行，與其他相關資料之記錄；(2) 學生的工作單；(3) 數學日誌以及 (4) 教學者之心得與反思記錄等。所有上述之資料經編輯、整理，以進行資料之分析。

四、本研究之信、效度

研究信度主要是指當不同的研究者檢視共同研究所蒐集之同樣資料，是否能達到一致結果的程度。Goetz & LeCompte (1984) 認為增加研究信度的方法為：直接引用原始資料，研究者之能力以及參與者共同分析資料以避免主觀。因此，研究者將秉持這些原則，以增加本研究之信度。為確保本研究之效度，本研究採資料來源之三角校正：乃運用學生之工作單、數學日誌、教師觀察與學生發表之資料交叉檢驗。例如：S12 於發表時能夠清楚的陳述第一塊板子與其他板子的關係：

S12：因為第五塊最小，我們可以最小單位為準，將其他各塊做相等的分割後，全部共分割有十六小塊和第一塊可分割成四小塊，所以第一塊應該佔十六小塊中的四小塊，也就是說十六分之四，所以答案是 4/16。

教師藉由觀察 S12 的表達確認 S12 概念清楚；同時，在 S12 的數學日誌上亦發現：

第一塊應該佔全部的十六分之四，也可以是八分之二，也可以是四分之一。

藉由上述之分析，本研究已達良好之資料來源的三角校正。

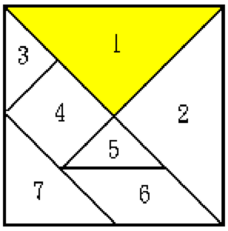
肆、研究結果與討論

本研究之主要目的乃是將七巧板融入分數單元之教學活動中以探討小六兒童常見之分數迷思概念、解題策略與教學後之改變情形。資料之呈現與討論分述如下：

活動一：第一塊板子的故事

研究者為了觀察學生在分數概念的表現情形，於是利用七巧板第一塊板子與全部七塊板子間面積會有什麼關係？讓學生分組討論，並在討論後進行發表，請學生分享解題想法。以下是活動歷程：

活動目標：探討兒童分數概念及解題策略並以合作學習方式達成解題目標。
佈題：小朋友，下列七巧板之編號 1 的板子的面積佔全部面積的多少？



解題時各小組間交頭接耳紛紛討論自己的解題策略，也互相質疑、溝通與修正不同的觀點。在豐富的討論中，學生所發表之解題策略類型多樣化，同時亦發現一些迷思概念。本活動發現三種分數迷思概念及四種不同之解題策略，分述如下：

一、　三種不同之分數迷思概念：

本教學活動進行中所發現之三種不同的分數迷思概念，分別為：

（一）　**不知分數為何物：(P1、P2、P4、P6)**

兒童直接以其觀察到各板子之間大小關係做為解題的策略，所以兒童直接比較各塊之大小，完全忽略題目所問之意義與分數概念為何？

（原案三之一）

S8：第一塊最大，第五塊最小。

T ：就只有這樣嗎？

S8：(點頭！)

T ：你們是否能說多一點！

S8：(搖頭！) 沒有數字，不能算！

這組學生不知如何進行解題，研究者認為 P2 組可能是不懂題目問什麼？或者是由於不具備分數知識，因此無法進行解題？研究者乃進一步追問以確認：

T ：編號 1 的板子的面積佔全部面積的幾分之幾？你用分數表示看看！

S8：(沉默不語！)

T ：你試著以分數來表示看看！

S8：不知道！

由上述之追問可以發現，這組學生由於不具備分數概念，因此無法依題意以

分數的形式來表徵。此時，因為還有許多小組急著發表，為了掌握課室發表時間，乃請其他組學生繼續報告，也期待其他小朋友的報告能夠協助並喚醒她們分數的概念。

（二）無法釐清「部分~全體」關係（P15、P16）

部分學童由於缺乏「部分~全體」概念，回答問題時分別將分數中之分母、分子視為獨立的，因此無法以正確的分數表徵。

（原案三之二）把分數分成兩部份，缺乏「部分~全體」概念：

S15：全部有七塊，1 號板子只有 1 塊其他共 6 塊，所以編號 1 的板子的面積佔全部面積的是六分之一。

S15 將分母與分子分開，研究者為確認該組學生缺乏「部分~全體」概念，乃再追問：

T ：那如果全部面積的$\frac{3}{4}$？

S15：第一塊、第二塊、第三塊分一堆和第四塊、第五塊、第六塊、第七塊分一堆，這就是$\frac{3}{4}$。

從學生的回答中可確認該組學生缺乏「部分~全體」的概念。

（三）缺乏等分概念（P3、P12、P14）

這幾組學生雖然能用分數來表徵，但由於缺乏等分概念，因此以七塊個數為全部，第一塊為七塊中的一塊，並認為答案是$\frac{1}{7}$。

（原案四）

S9：第一塊佔全部的七分之一。

T ：說說看！為什麼你會說七分之一。

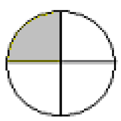
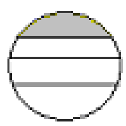
S9：因為總共有七塊，第一塊是佔七塊中的一塊，所以是七分之一。

T ：可是它們每一塊並沒有一樣大啊！（老師提示七塊大小並不相等！）

S9：我是班上的三十二分之一，班上每個人的身高、體重也都不同啊！

從學生的回答中可以發現這些學生明顯缺乏等分概念，這也讓我恍然大悟平常上課中，為了採用真實情境，往往以周遭易取得之材料做例子，例如：老師常常會問：班上有三十二個人，你佔班上的幾分之幾？由於忽略了離散量間的每一個單位分量是否相等。因此，當學生有這樣的懷疑又沒有即時加以澄清，以致將此錯誤的概念沿用到以後，進而影響往後的解題。造成學生迷思概念的因素很多，有些原因可能來自教師的教學(Graeber & Tirosh, 1989)。為進一步釐清學生等分概念的重要，研究者藉由下述佈題以引導兒童澄清迷思：

（原案五）

T ：說說看！（1） **灰色的部分佔全部的多少？** （2）

灰色的部分佔全部的多少？

S9：**都是四分之一啊！**

班上小朋友已按捺不住想發表的情緒，紛紛舉手搶著要回答這個問題，老師請

S30 來回答這個問題。

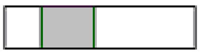
（原案五）

S30：第一個是$\frac{1}{4}$，第二個無法確定！因為四份不一樣大！

T ：你（S9）懂了嗎？分數中每一個需等分。

S9：嗯！（點點頭！）

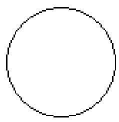
T ：那你再說說！（1）  **灰色的部分佔全部的多少？**

（2）  **灰色的部分佔全部的多少？**

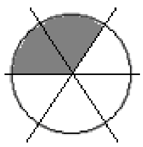
S9：第一個是$\frac{1}{3}$，第二個無法確定！因為三份不一樣大！

老師還是不放心，懷疑兒童是否只是模仿別人的做法，而不是真正的了解，因此再提出另一問題以確認該生是否真正了解等分概念：

（原案六）



T ：請畫出右圖的 2/6

S9： 

學生不只能知道等分的重要，更藉由實際操作成功地完成等分的圖形，由上述的討論，已讓多數的孩子再次澄清等分的概念。

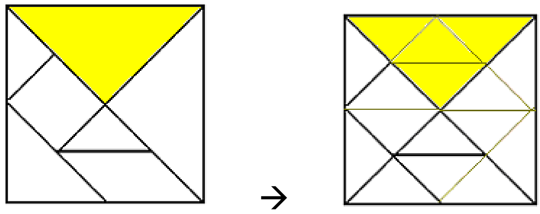
二、活動中小六兒童之多元解題策略：

（一)、能夠善用參考點 ~ 以最小單位為單位量做基礎（P7、P9）

P7、P9 這二組小朋友能夠以最小塊為參考點，巧妙地選用最小塊板子為單位，並對其他板子進行等分割：

（原案七）

S12：因為第五塊最小，我們以最小單位為準，將其他各塊做相等的分割，全部共分割有十六小塊和第一塊可分割成四小塊，所以第一塊應該佔十六小塊中的四小塊，也就是說十六分之四，答案是 4/16。



（圖一： P7、P9 組的圖形表徵方式）

T　：**你如何確定每一小塊都相等？**

S12：**我們把每塊板子試著分成像第五塊那麼小！共有十六塊！**

T　：**那十六塊都一樣大嗎？**

S12：**應該都一樣大嘛！**

T　：**你確定！**

S12：**嗯！**

這幾組學生能以最小單位為參考點，並將原正方形分割成 16 個小單位，如（圖一），進而能觀察出第一塊所佔單位量是 4，整體單位量是 16 個小單位，所以答案是 $\frac{4}{16}$ 。

研究者在學生數學日記上亦發現學生不但能說出 $\frac{4}{16}$ ，在過程中學生也能夠運用等值分數概念；如 S12 在數學日記上陳述：

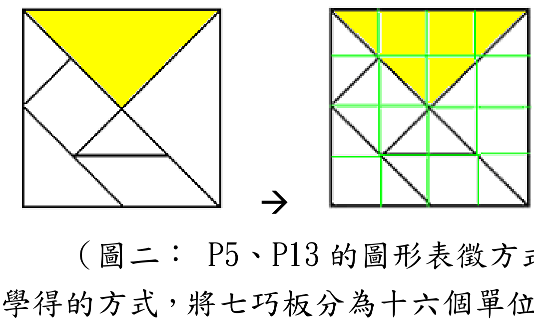
「**第一塊應該全部佔十六分之四，也可以是八分之二，也可以是四分之一**」這幾組學生的解題過程，令人振奮，不但運用自己的想法解題，同時亦呈現清晰的等值分數概念。

（二）以小方格為單位進行解題（P5、P13）

兒童依學習面積之經驗，利用單位格子的方式解決問題。

（原案八）

S13：**以單位格子方式，將七巧板劃分成 4x4 的格子，總共十六格，其中第一塊佔二格及四個半格，每二個半格可合成一格所以共是四格，因此第一塊佔全部的十六分之四。**



（圖二： P5、P13 的圖形表徵方式）

學生利用面積單元中所學得的方式，將七巧板分為十六個單位格子如圖二，然後利用面積分割、合併的保留概念組合成單位方格子；並求出第一塊所得的單位方格子是 4 個與全部 16 個單位格子作比較，結果是十六個中佔四個，因此答

案為 $\frac{4}{16}$。這組學生也知道覆蓋各塊板子需要幾個單位方格子，及它們之間的關係。

（原案九）

S13：正方形 2 格、平行四邊形 2 格、最小三角形 1 格、最大三角形 4 格…..

學生採此策略很清楚地將各塊之間的大小比率關係，詳細的列出，例如：正方形 2 格、平行四邊形 2 格所以兩者的面積是一樣的…。

T　：那你怎麼知道要剛好分割十六格？

S13：我們以中心點畫十字，再分別慢慢等分，發現十六格時，各圖形剛好可以互補為單位格子。

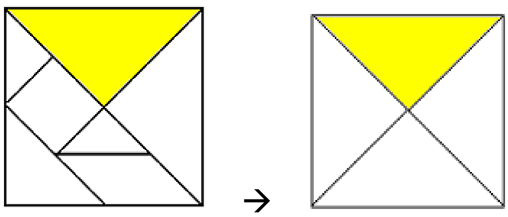
T　：點子真不錯！

學生能夠靈活運用舊經驗，成功發展解題策略。看到同學們交頭接耳說:「這個方法不錯！」、「那個方法不好」，學生互相評析別組同學解題方式及自己解題的差異，互動中豐富了兒童的想法。此時，欣賞著學生的表現，心中充滿著愉悅之情。

（三)、選擇適當大的單位當作參考點（P8）

本組學生直接使用 1 號板為基本單位，並巧妙地將原正方形四等分，同時依問題選擇最簡略的解題策略。

（原案十）



（圖三：P8 的圖形表徵方式）

S4 ：第一塊是全部的四分之一。

T　：你這麼快就算出答案啊！請解釋你們的原因？

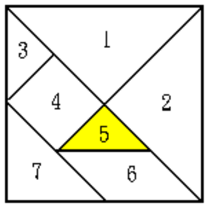
S4 ：因為很容易的就看出來！只要將七巧板分成四份，第一塊是四塊中

的一塊，所以是四分之一。

令人訝異！這幾組學生能將其等分成四部分很快地找出答案。老師為了確定學生是否真正的了解等分量及各板子之間的關係，於是再追問下列問題：

（原案十一）

T　：那如果要求最小的那塊（第五號）呢？

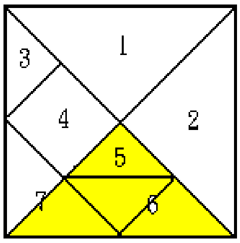


（圖四：再次佈題追問）

S4　：一樣啊！先試著能切成一樣大如果不一樣大再繼續進行分割，不過要切成一樣大才可以！

T　：你畫看看！

S4　：就是以最小那一塊為準繼續等分割！



（圖五：S4 的圖形表徵方式）

T　：那它佔全部的多少呢？說說看你的解題過程？

S4　：這部份和第一塊一樣都是四分之一，可以分割成四塊，全部共有四部分，所以 $4 \times 4 = 16$，共有 16 小塊，所以最小那一塊應佔全部的 $\frac{1}{16}$ ！

這組學生在進行分割時已具備等分及複合單位量的基本概念，故一開始他們不像上述二種方法先進行最小單位量的分割。而且進行大單位量分割時亦不受其他小塊所干擾，經進一步追問，證明該組學生了解等分概念，同時能夠洞察部分與整體之關係，不須將其細分成最小單位量以當作比較的基準。

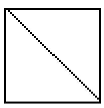
（原案十二）

S4　：第一和第二塊合起來，會和第三、四、五、六、七塊合起來一樣大！

T　：那你知道它們佔全部的多少嗎？

S4　：1/2

T　：說說看！你怎麼看出來的？

S4　：很簡單！就是這樣  。

分割、合併、大小單位，運用自如，不愧為本班的數學高手！

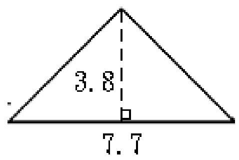
（四）、使用實際測量方式解題（P10、P11）

P10 組直接利用測量方式，求出底與高，進而運用面積公式求出第一塊之面

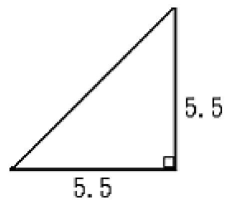
積。在討論中，研究者耐心的傾聽，發現許多有趣且平常不易觀察到之有價值的對話：

（原案十三）

S16：先量出第一塊的底和高，再量出正方形的邊長，分別各算出面積後　再比較！（圖六）



（圖六：S16 所採用之方式）



（圖七：S17 所採用之方式）

S17：應該不用那麼麻煩，我們只要量出兩邊，因為是直角三角形我們就可知一個是底，另一個是高。(圖七)

平常上相關單元時,研究者已發現大部分的學生在測量形狀時均習慣第一種三角形的測量方法（圖六），卻不知利用第二種方式（圖七）；直角三角形兩邊可以互為底或高,甚至質疑怎麼可以只量兩邊而不量高呢？例行性的解法使兒童的思考僵化，無法彈性靈活地解決問題。

（原案十四）

S17：如果是等腰直角三角形，只要量一邊就好就可求出面積。不必像你這樣還要做高又要用尺量底和高！

S16：這樣算起來會一樣嗎？

S17：我們來試試看！

在求三角形面積的過程中，無論何種三角形，學生皆習慣先作一個高然後再找底，最後求面積，往往忽略直角三角形中兩邊可互為底或高。這一組的兩位小朋友經由實測、運算與不同的方式中，探討不同策略的可行性。

第一塊三角形的面積，這組小朋友採用兩種不同的策略：

S16：7.7×3.8÷2=14.63（**作出高後，量底和高；如圖六**）

S17：5.5×5.5÷2=15.12（**以兩邊互為底和高；如圖七**）

同一個三角形經由不同測量方式得到結果卻是不同的值,學生也互相懷疑對方是不是計算錯誤或測量錯誤，一時間學生也無法判別誰對？誰錯？對孩子而言，的確是傷腦筋！且看劇情如何發展。

S16：因為量的方式不同，所以所得的值有些不一樣（很肯定！認為值不同，就不一樣）

S17：同樣的一塊三角形，面積應該一樣？為什麼算起來會不一樣呢？

經由計算結果，兩種不同測量方式所得結果接近，但卻不相等。學生無法解釋為什麼？也無法判斷是否相等？因為如果相等就可證明學生 S17 的推論「同樣的一塊三角形，面積應該一樣」是正確的，但接近畢竟是不相等啊！研究者觀察到學生所面臨的困境，本想提醒學生如何解決問題，但考慮後還是決定待各組發表後

再找適當時機介入。另一方面也是保留機會給該組學生一個繼續思考的空間，同時持續觀察另一組採用測量方式之學生對話：

（原案十五）

S20：第一塊面積是 14.63cm²，全部面積是 59.6 cm²

14.63/59.6=0.2454697…（學生採用計算器）

S21：第一塊面積是 15.12cm²，全部面積是 59.6 cm²

15.12/59.3=0.2536912…（學生採用計算器）

P11 這組小朋友對測量的結果亦感覺到困惑？忍不住相互問對方心中之疑惑：

S20：同樣一塊板子算起來應該要一樣啊！

S21：對啊！為什麼這二種算法，算起來會不一樣呢？

S20：我知道了！因測量都會有誤差，只要不差太多，結果會很接近的！

S21：那結果不一樣要怎麼辦？

S20：每個人量的，多多少少會有一點不一樣？

S21：對啊！我想起來了，我們有學過概數（六上）！

P11 這組小朋友終於想到要用概數的概念來解決因個別學生測量誤差所造成計算後結果不同的問題，於是這組兩位學生各自再計算一遍：

S20：第一塊面積是 14.63cm²　全部面積是 59.6 cm²

14.63/59.6=15/60=3/12=1/4（採用先取概數及等值分數的概念）

S21：15.12/59.6=0.2536912…. =0.25=25/100=1/4（運算後取概數）

S20：喂！這次我沒有使用電算器，取概數到第二位很快的算出答案了！是 1/4（學生異常興奮！）

S21：我用計算機更帥！又快又準！按兩下答案就出來了！

學生從討論中知道測量會造成誤差，因此能接受彼此測量結果的差異。這些學生分別採用過程取概數及電算器算出小數後取概數然後轉化為分數，最後得到同樣的答案（$\frac{1}{4}$）。但學生心中仍認為自己使用的方法較好，甚至懷疑對方方法的可行性，當教師觀察到這種現象，於是建議學生互相交換使用對方的解題策略：

（原案十六）

S21：15.12/59.6=15/60=3/12=1/4（採用 S20 的過程中取概數概念）

S20：14.63/59.6=0.2454697…. =0.25=25/100=1/4(運算後取概數概念）

S21：我用你的方法算出來一樣耶！也是 1/4（學生採用概數的觀念）

S20：用計算器後取概數到小數點第二為位再化成分數也是 1/4！

T　：現在你們認為那一種算法較好呢？

S20：都不錯啦！（露出微笑，自己解題方法得到別人的認同！）

學生互相使用對方的策略，並得到相同答案，其中所獲得的不只是程序性的技能而已，在過程中許多的概念浮現，無形中加強數學內部知識的連結。學生在活動中也能察覺、溝通、評析其中的差異，並決定如何採取適當的解題策略。

老師看到 P11 組利用概數觀念成功解決數值不相等的問題，P10 組則經由課

室發表中了解了測量中有誤差與概數應用觀念使其能澄清其迷思概念。

（原案十七）

T　：你們這組（P10），看了（P11）的發表後，有什麼感想？

S16：我們忘了！用概數！

S17：我們沒有注意到測量時都會有誤差！

S16：14.63 如果四捨五入後到整數位就是 15。15.12 四捨五入後到到整數位就是 15，面積一樣嘛！。

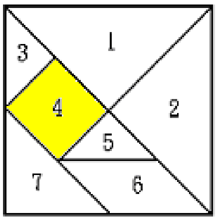
S17：原來如此！我懂了！

在此一包羅萬象的解題過程中，孩子充分發揮豐富的想像力，採取多樣創新的方法。一個開放性的問題，給學生無限的想像空間，如果沒有此項活動，我們也許不知道孩子有如此高的潛力。同時，此解題活動亦提供教師機會省思過去之教學歷程，進而在設計課程或修正教學內容、教學方式有所借鏡。

活動二：課室討論後的成效評量

經過一個星期，為了檢視學生之學習成效，研究者乃以下列問題進行評量：

＊ 小朋友編號 4 的板子的面積佔全部面積的多少？



以下分析與歸納各組學生之解法：

（1）堅持己見型：(P7)

S30：第四塊正方形可分割 2 個小三角形，所以全部佔 $\frac{2}{16}$，也可以是 $\frac{1}{8}$。

P7 組認為其他組的策略並沒有比較好，於是堅持採取自己原先的解題策略。

（2）知過能改型：(P3、P16)

學生在發表過程中經由老師引導及其他同學正確的解題中發現自己的錯誤，進

而澄清自己的迷思，並在多種解題策略中選擇出自己較能接受的方法。

S19 ：板子不一樣大，所以不是七分之一

S29 ：那我們用什麼方法呢？

S19 ：最小單位量及畫格子都不錯！

S29 ：那就用最小單位量！

有兩組學生原先缺乏等分概念，在觀察其他各組成功的解題後，了解自己的錯誤，並修正自己的解題策略，進而成功解出答案是 $\frac{2}{16}$。

（3）見風轉舵型：(P10、P11)

兩組兒童觀摩他人不同的想法後，改變原先之解法：

S16：我覺得我們用量的方法很不方便！

S17：對啊！你看第 P7 組用最小塊板子為單位很快地找出答案！

S16：但我覺得第 P5 組以小方格為單位也很方便啊！

S17：不過還要畫那麼多格子，比較麻煩！

S16：好啦！好啦！就用第 P7 組的方法！

經過課室討論後，兒童可以參考其他組的解法並修正自己的做法。當學生察覺到別組巧妙的解法，因而改變最初比較繁雜的方法，採用較方便的解題技巧。方法雖不同，結果卻一樣，這也印證了「條條大路通羅馬」的道理。

（4）原地踏步型：(P4)

低成就學生，本身對數學便充滿著挫折感。對自己沒信心不敢表達自己的想法

T　：同學們都說出看法及算法，那換你說說看！

S 6：(低頭不語！)

T　：不用怕！說錯了沒有關係！

S 6：(搖搖頭！)

課室發表中大部分兒童均熱烈參與，但對低成就學生來說，只是遊戲中的觀眾，並無法體會其中的樂趣。他們無法對課室發表中的問題做任何評論，這是發表活動的限制，老師並無法使每一位學生均融入活動中，是今後需努力的目標。

最後表一呈現評量結果，各組解題類型和原先各組解題類型：

表一：*學生解題類型及教學前後解題成功率的比較表*

兒童解題類型	**第一次學生採用的策略**	**採用百分比**	**第二次學生採用的策略**	**採用百分比**
一、不知分數為何物	P1, P2, P4, P6	25.2%	P1, P4	12.6%
二、缺乏部分~全體的概念	P15, P16	12.6%	無	0%
三、缺乏等分概念	P3, P12, P14	18.9%	P12	6.3%
四、以最小單位為單位量做基礎	P7, P9	12.6%	P3, P6, P7, P9, P11, P13, P16	44.1%
五、以方格為單位量做基礎	P5, P13	12.6%	P2, P5, P15, P14	25.2%
六、選擇適當大單位為單位量做基礎	P8	6.3%	P8, P10	12.6%
七、使用實際測量方式解題	P10, P11	12.6%	無	0%

表一之比較結果顯示：

一、　不知分數為何物：活動前約有 25.2%的小六學生不知分數為何物，因此，解題時無法連結分數概念於其中。活動後只剩 12.6％的兒童仍無法有效的解題。

二、　部分~全體的概念：活動前，有 12.6％的學生由於缺乏「部分~全體」的概念，以致無法解題。但在活動後，原有迷思之學生均已能解題成功。

三、缺乏等分的概念：活動前 18.9％的學生雖能以分數表示，但卻缺乏等分概念。但活動後之評量結果顯示，則只剩下一組兒童仍有此迷思概念（佔 6.3％）。

四、活動後，以最小單位為單位量做基礎的策略，從 12.6%提升至 44.1％，且解題成功。同時以方格為單位量做基礎也從 12.6%增為 25.2％。前者有實質使用的方便性，後者則是和以前學習面積的情境相似，因此教學後較多的學生選用此方法。使用實際測量方式解題原先有 12.6％，但活動後沒有兒童再使用此策略，分析其原因乃是由於解題過程太複雜且費時，因此不再受學生歡迎。

伍、結論與反思

結論

課室討論歷程中，小六兒童在分數方面常見之迷思概念為不瞭解分數為何物，無法釐清「部分~全體」的關係以及缺乏等分的觀念，這些分數教學中常見之問題

與先前之相關研究結果（呂玉琴，1991；Behr, Wachsmuth, Post, & Lesh, 1984；Bergeron,et al.,1987；Cramer, Post, & delMas, 2002; Southwell, 1985）相一致。顯示教師教學時應設計相關之教學活動以協助兒童修正這些迷思概念。

在教師巧妙的佈題，適當的引導與鼓勵下，可以激發兒童多元解題策略：如能夠善用參考點~以最小單位為單位量做基礎，以小方格為單位進行解題，選擇適當大的單位當作參考點以及使用實際測量方式解題等策略。此正顯示教師應多鼓勵發展解題策略，孩子的想像空間是無限的，千萬不要低估了孩子的能力（NCTM, 2000）。

活動前約有 56.7%的學生具分數迷思概念，但教學後，只剩 18.9%的學生仍然缺乏分數概念。因此，學生在分數迷思概念的改變是明顯的，顯示本教學活動對學生的學習具正面的幫助。

教學反思

願意改變現狀、嘗試不同的教學設計與教學方式是教學進步的原動力（楊德清、洪素敏，2003）。的確，勇於嘗試是進步的不二法門，以下與各位分享研究者之反思：

（一）善於應用教學中垂首可得之具體物

七巧板對老師及學生而言是耳熟能詳的教具，由於七巧版之七塊版子恰好可以組合成正方形，雖然大小不同（其中五塊）但彼此之間卻具倍數關係，因此將其融入分數單元，可用以檢測孩子分數概念、部份-全體概念與等分概念，是物盡其用。同時發現孩子可以從其中發展多種的解題策略，是超出教師當初之預期。因此，將七巧版融入分數單元具有其應用價值。

（二）藉由溝通與討論，可以分享不同的解題策略與豐富兒童的數學知識

藉由同學間的討論與溝通，學生不但可以分享不同的解題策略，亦可從反思中中澄清自己的想法。的確，藉由合作學習與溝通，可以讓不同程度的學生有不同的學習機會(Artzt & Newman,1997；Johnson & Johnson,1992；Vygotsky,1978），並且在觀察與互動中創造兒童學習的機會。

（三）溝通與討論可以給予兒童較多的時間與空間去思考與討論問題

讓學生有較多的時間與空間去思考、去討論問題，不但可以讓教師可以知道學生的反應及了解學生的想法，同時可以引導學生了解思考與討論的重要。並且讓學生有機會去觀摩他人的想法，比較差異，與藉此修正及澄清自己的概念。

如果沒有將七巧版實際應用於教學中，我們也許不知道小小的活動中卻蘊涵著學生豐富的想像力。經由課室討論與溝通，兒童不但可以更加穩固其分數概念，教師亦可以從經驗中累積教學知識。

誌 謝

本研究蒙國科會專題研究計補助，計畫編號 NSC 92-2522-S-415-002，特誌申謝；文中所提論點純屬作者個人之意見，並不代表國科會立場。同時感謝參與本研究之學生與審查委員所提供之寶貴意見，使得本文得以更臻完備。

參考文獻

何鳳珠（2004)：**國小六年級學童以七巧板發展分數基準化能力研究**。嘉義：國立嘉義大學數學教育研究所碩士論文。

呂玉琴（1991)：分數概念文獻探討。**台北師院學報，4**，537-606。

南一書局（2004)：**點、線、面評量講義（國中數學第二冊)**。臺南：南一書局

楊德清和洪素敏(2003)：比較分數大小~從具體、半具體、至抽象符號表徵之教學行動研究，**南師學報，37(2)**，75~103。(NSC 91-2521-S-415-001)

黃敏晃（1994)：**國民小學數學新課程之精神**。台北：台灣省國民學校研習會。

鄔瑞香（1994)：**我的數學教學模式－探索、反省與成果**。載於國立嘉義師範學院，82 學年度數學教育研討會。

M.Q.Patton(1990)/ 吳芝儀、李奉儒譯（1995)：**質的研究與評鑑**。台北：桂冠。

Max A. Sobel. Evan M. Maletsky 原著：Teaching Mathematics：a sourcebook of aids, activities, and strategies, 2nd ed. /張靜嚳、念家興譯（1996)。**數學教學方法**。台北市：九章出版。

Artzt, A. F. & Newman, C. M. (1997). *How to use cooperative learning in the mathematics class*. Reston: NCTM.

Baroody, A. J. (1987). *Children's Mathematical Thinking: A Developmental Framework for Preschool, Primary and Special Education Teachers*. New York: Teachers College Press.

Bergeron, J.C. & Herscovics, H. (1987). *Unit Fraction of a Continuous Whole.* The 11th International Conference for the Psychology of Mathematics Education.

Behr, M. J., Wachsmuth, I., & Post, T. R., & Lesh, R. (1984).Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*, 323-341.

Cramer, K. A., Post, T. R., & delMas R. C. (2002). Initial fraction learning by fourth-and fifth-grade students: A comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational number project curriculum, *Journal for Research in Mathematics Education, 33 (2)*, 111-144.

Empson, S. B. (2003). Low-performing students and Teaching fractions for understanding: An interactional analysis, *Journal for Research in Mathematics Education*, *34(4)*, 305-343.

Fuson, K. C., Carroll, W. M., & Drueck, J. V. (2000). Achievement results for second and third graders using the standards-based curriculum Everyday Mathematics, *Journal for Research in Mathematics Education, 31(3),* 277-295.

Goetz, J. & LeCompte, M. (1984). Ethnography and qualitative design in educational research. Orlando, FL.: Academic Press.

Graeber, A. O. & Tirosh, D. (1989). Preservice Elementary Teachers' Explicit Beliefs about Multiplication and Division, *Educational Studies in Mathematics, 20(1)*,79-96.

Hart, K. (1988). Ratio and proportion, In J. Hibert & M. Behr, (Eds.) *Number concepts and operations in middle grades* (pp.198-279). Reston, VA: NCTM.

Heddens, J. W. (1984). *Today's Mathematic(5thed)*. Chicago:Science Research Associates.

Johnson, D. W., & Johnson, F. (1992). *Joining together: Group theory and group skills(4th ed.)*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Kamii, C. (1994). *Equivalent fractions: An explanation of their difficulty and educational implications.* Paper presented at the NCTM Research Presession jointly with the AERA SIG/RME, Indianapolis, April 12, 1994.

Kerslake, D. (1986). Fraction: Children's strategies and errors: *A report of the*

Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project. Windsor, England: NFER-Nelso.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *The Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Post, T. R., Cramer, K., Behr, M. J., & Lesh, R., Harel, G.. (1992). Curricula implications of research on the teaching and learning of rational number concepts. In T. Carpenter, T. Fennema, & T. Romberg(Eds.), *Research on teaching, learning, and assessing of rational number concepts*(pp.327-362). Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. H. (1994). *Mathematical thinking and problem solving.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Southwell, B. (1985). The development of rational number concepts in Papua, New Guinea. In A. Bell, B. Low, & J. Kilpatrick (Eds.),Theory, Research, and practice in mathematical education. Nottingham, England: SCME., University of Nottingham.

Silver, E. A. (Ed.). (1985). *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

van Hiele, P. M. (1986). Structure and insight: *A theory of mathematics education. Orlando*, FL : Academic Press.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mine in society: The development of higher psychological process*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Yang, D. C. (2003). Teaching and Learning Number Sense—An Intervention Study of fifth grade students in Taiwan, *International Journal of Science and Mathematics Education*, *1(1)*, 115-134. (NSC 90-2521-S-415-001)

The Study of Connection Teaching Activity for the Eastern Magic Board, Fraction and Problem Solving

Der-Ching Yang[1] Zhi-Xu Huang[2]

[1]Graduate Institute of Mathematics Education, National Chiayi University
[2]Yunlin County Tai-xi public elementary school

ABSTRACT

32 students from a middle-sized elementary school of Yunlin county joined this study. The purposes of this study were to integrated tangram into the teaching to investigate sixth graders' misconception on fraction, problem solving strategies, and the change of misconceptions and strategies after teaching.

Results indicated that three different fractional misconceptions were found which included: 1).without understanding the meanings of fractions; 2).without recognizing the relationship between part and whole and 3).lacking the concept of equal parts. At the same time, four different strategies were used in the class. These included 1).using benchmark appropriately; 2).using the smallest grid as a unit; 3).selecting the appropriate unit as a benchmark and 4).using real measuring method to solve problems.

50.4% of these students had misconceptions on fraction before teaching, however, only 18.9% of these students without change after instruction. At the same time, about 1/3 of sixth graders could not solve or used the incorrect strategies to solve problem before teaching, however, after instruction they could applied correct strategies to solve problems. This indicates that the teaching has positive help on children's learning of fractions and the use of strategies.

Key words: Tangram, fraction, problem solving, misconception.