

合作學習情境中學生數學概念學習之研究

---以 Posner 概念改變模式與 Toulmin 論證模式分析為例

陳彥廷¹ 柳賢²

¹ 中華醫事學院幼兒保育系

² 國立高雄師範大學數學系

(投稿日期：94年2月13日；修正日期：94年3月17日；接受日期：94年5月9日)

摘要

隨著學習與教學之觀念轉變，建構知識的主體已由過去以教師為主體轉成強調自我建構的以學生為主體。因此，數學的學習目標便在於強調學生能夠真正地理解 (understanding) 數學知識，而不是背誦之機械式記憶。本研究為質性研究。研究主要目的是在研究者所佈置的合作學習情境中，藉由 Posner (1982) 概念改變模式瞭解三位學生在此情境脈絡中如何透過彼此間相互的對話，造成學生個體內部概念生態形成不穩定的狀態，促進學生個人概念改變，進而達成概念學習之成效；再以 Toulmin (1958) 論證模式分析學生在進行對話的過程中的論證表現。研究對象選取研究者課室中的三位高一學生。蒐集的資料為研究參與者學習歷程之錄影帶轉錄文本與學習單。研究結果發現：教學不能只是告知學生或向學生展示知識，教師必須要讓學生經由自己的思考與推理、對話溝通去創造意義；唯有讓學生概念生態產生不穩定的狀態下，學生才會去改變自己既有之概念結構。再者，學生論證的取向包括直觀經驗與實例之論證、形式理論之論證。因此，教師除了盡量位學生佈合適之論證題型外，尚須鼓勵學生多思考、辯證以營造論證之氛圍，方能使課室中的學習更為意義化。

關鍵字：合作學習、數學概念學習、概念改變模式、論證模式

壹、研究背景與目的

隨著認知心理學與建構主義論逐漸被數學教育界所重視之當下，建構知識的主體已由過去講授式的以教師為主體轉成強調自我建構的以學生為主體。因此，數學的學習目標便在於強調學生能夠真正地理解（understanding）數學知識，而不是背誦之機械式記憶。是故，學生概念的理解也強調須由學生在同儕社群中藉由相互間的對話、澄清進而達成概念的建構與轉變。然而，研究者經過幾年來的教學感知：學生在踏入課室之前，其腦袋並非空空而來。其實，在他們進入課室之前，他們的腦海中早已從自己的親身經驗中建構一個關於所要學習的概念之架構，而此概念的架構是否完全正確便隨人而異。身為一位數學教師，便有責任將學生的概念架構加以修正、增長---此即學生真正的學習。

有鑑於此，研究者在一高一課室中參考 Slavin (1978) 所提出之「學生小組成就區分法 (Student's Team Achievement Division, 簡稱 STAD) 設計一個合作學習的情境，冀望學生能在此情境脈絡下透過彼此間相互有意義的對話，造成學生個體內部概念生態形成不穩定的狀態，促進學生個人概念改變，進而達成概念學習之成效。此乃研究動機之一。再者，學生在進行對話的過程中，他們究竟用了什麼依據說服同儕？他們提出什麼論點支持自己的說法？此即為論證 (argument) 之表現。在論證邏輯結構的研究上，Toulmin (1958) 提出「D-W-C」的論證模式，此論證模式可以藉此了解學生對同一現象造成差異詮釋的主因，幫助教師認清學生個體將因背後支持理論的不同、引用的論據相異而對現象的看法也就有所不同。此乃研究動機之二。

基於上述之研究動機，本研究從 Posner (1982) 概念改變模式和 Toulmin (1958) 論證模式來展示高一學生在合作學習情境中數學概念的學習狀況。據此，筆者提出本研究之研究目的如下：

- 一、探究學生在合作學習情境中數學概念改變的情形。
- 二、探究促進學生數學概念改變的可能機制。
- 三、探究學生在合作學習情境中論證表現的情形。
- 四、探究學生論證行為表現的傾向。

貳、理論基礎與文獻探討

基於本研究之目的，首先根據 Posner, Strike, Hewson & Gertzog (1982) 的主張論述概念改變的條件及其理論；其次，闡述 Toulmin (1958) 所提之「D-W-C」的論證模式，以作為本研究之立論基礎。

一、概念改變條件的理論

從研究者自身的教學經驗中發現：學生在進入課室時，他們所抱持的一些數學觀點很大的部分都是累積於生活經驗。因此，要促使學生概念改變，絕非只是單純告訴學生一些正確觀念即可。Posner, Strike, Hewson & Gertzog (1982) 發表了一個概念改變模式的必要條件---這些條件必須充分滿足才能使學生改變概念---此些條件分別為不滿意、可理解的、合理的、有利的。以下將略為介紹：

(一) 不滿意 (dissatisfaction)

學生似乎不容易放棄原有概念，除非他有充分的理由去懷疑它。有時，親自觀察更能促使學生對概念產生不滿意。但是，「不滿意」它不是可以使概念改變的唯一條件（Hewson & Hewson, 1984; Nussbaum & Novick, 1982, 轉引自王美芬等譯，1996），還有其他的條件也是需要的。

（二）可理解的（intelligible）

如果沒有其他可理解的方法提出，則學生會認為已存在的先備概念也許可以考慮「修正」，也許不理會那個明顯的難題而繼續保持原先的概念（Posner, Strike, Hewson & Gertzog, 1982, 王美芬等譯，1996）。因此，Hewson（1996）提出：若欲使學生認為此概念是可理解的（intelligible），則須問：學習者知道它的意涵（means）嗎？學習者能夠尋找一個方式呈現（representing）此概念嗎？換句話說，學習者若覺得此概念是可理解的、易於領悟的，則他必能以一種他熟悉的方式去說明、呈現此概念，而不只是單純的覆誦老師所教授的意義而已。

（三）合理性（plausibility）

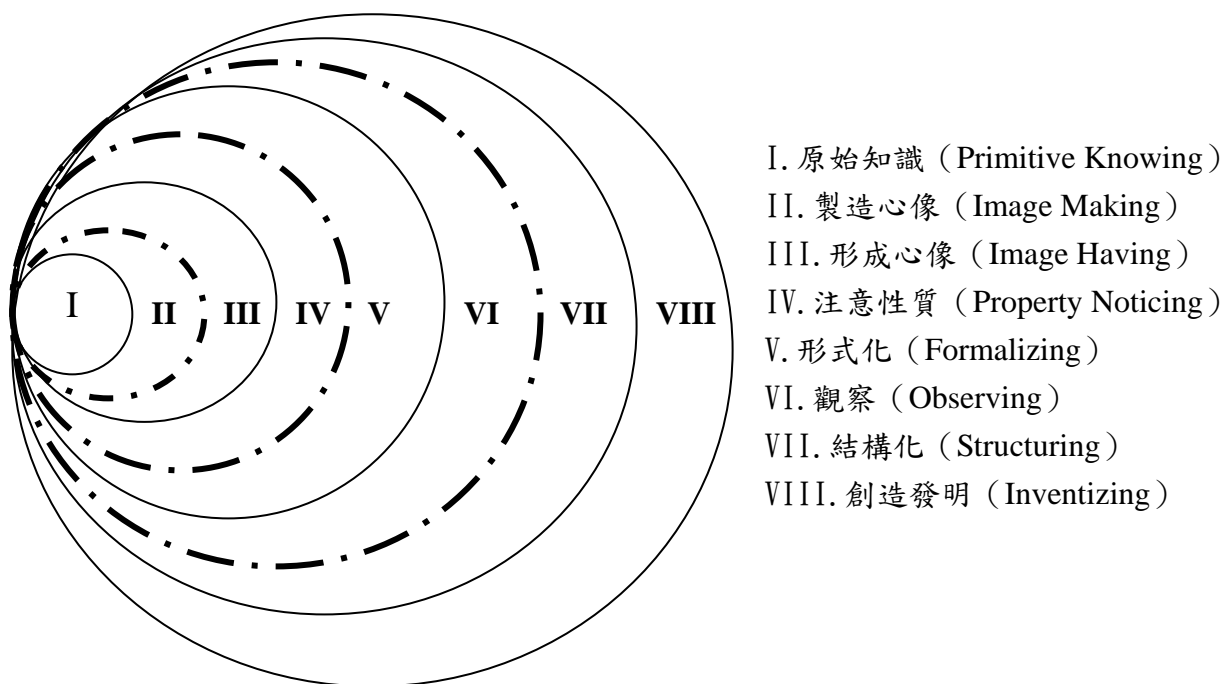
有時縱使提供了其他易於領悟的例子，如果這個例子不合理，學生似乎仍無法瞭解（王美芬等譯，1996）。因此，Hewson（1996）提出：若欲使學生認為此概念是合理的（plausible），則須問：學習者認為它是真實（true）的嗎？它能和學習者所接受的其他概念產生一致性嗎？換句話說，要學習者覺得此概念是可信的、合理的，則此概念必須和學習者所接受的概念是相融合的，不能有所衝突的。

（四）有利的（fruitfulness）

這需要捨棄原始的概念（original idea）而改用另一觀點（王美芬等譯，1996）。因此，Hewson（1996）提出：若欲使學習者認為此概念是有利的（fruitful），則須問：學習者從此概念中獲得了什麼價值（value）？它能解決學習者之前所不能解決的問題？它給予學習者新的方向或想法？換句話說，要學習者覺得此概念是合理的、有利的，則此概念必須能解決學習者過去學得的概念無法解決的問題，讓學習者能覺得此概念是有幫助的才可。

有鑑於此，Hewson（1996）將上述可理解的（intelligible）、合理的（plausible）以及有利的（fruitful）三個情形稱為「個人的概念狀態（status of a person's conception）」。此概念生態是有層次關係的---新概念的獲得必須依序是---可理解的（intelligible）→合理的（plausible）→有利的（fruitful）。新概念的學習意味著該概念的狀態提升了。然而，影響概念改變的向度絕非只有此三種層次向度，個人所持知識論的本質、後設信念、學習動機……等再再都影響著學習者的概念學習，這些總總向度因子 Hewson（1996）將它們稱為概念生態（Conceptual ecology）。

Pirie（1994）在解釋數學理解（understanding）時將數學理解定義成一個動態的（dynamic）、非線性的（nonlinear）、遞迴的（recursive）過程，並且是一個組織知識結構的數學過程。數學理解的成長是發生在個體與其他人，如老師或同學互動的情境中，包括了內在與外在的互動（Pirie & Kieren, 1989, p.8, 轉引自巫正成，2000）。因此，她以下列之模型（圖一）表徵數學理解。



圖一 數學理解成長模型 (Pirie & Kieren, 1992, p.246,轉引自巫正成, 2000)

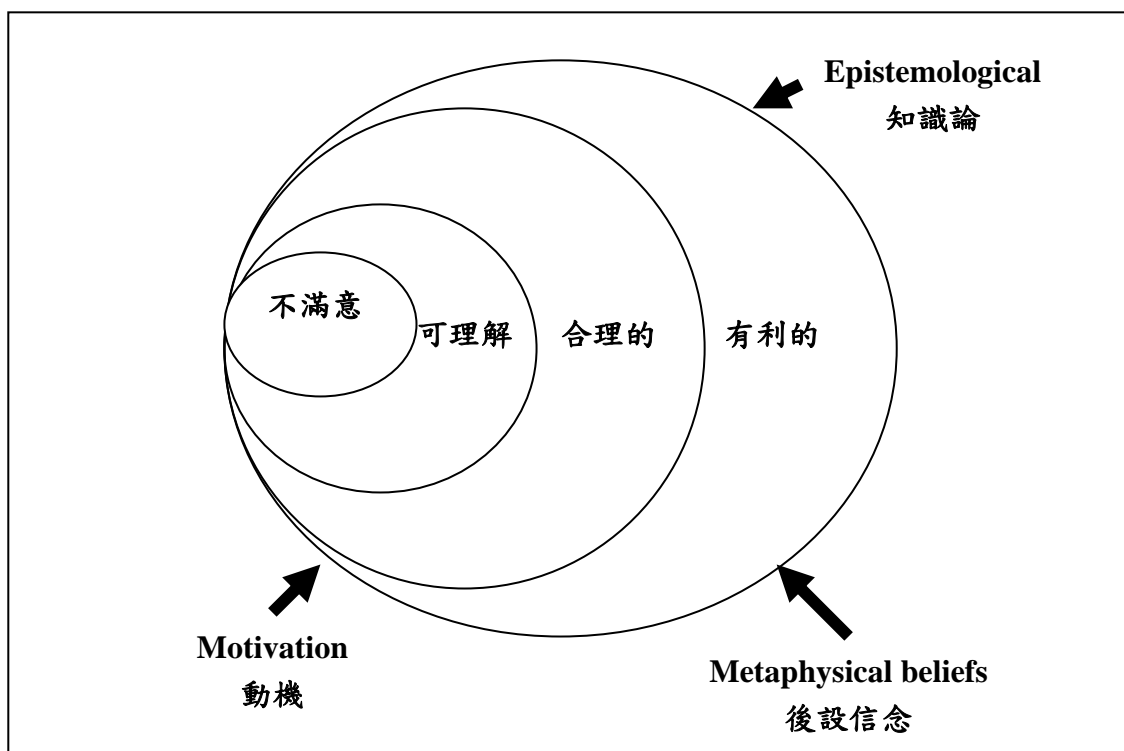
以下，研究者將 Posner, Strike, Hewson & Gertzog (1982) 之概念改變理論與 Pirie (1994) 之數學理解模型理論相互對照與比較，如表一所示：

表一 Pirie 之數學理解模型理論與 Posner 等人之概念改變理論比較

Pirie 之數學理解模型理論	Posner 等人之概念改變理論
<p>動態的、非線性的</p>	<p>數學理解是一個在層次之間來回持續移動的過程。</p>
<p>遞迴的</p>	<p>理解的每一個層次的內容都會與它之前的那個層次的內容結構相似，但卻又超越 (transcendent) 之前的層次；所以<u>每一個層次都有路徑可以回到先前的任何層次</u>，而且層次與層次之間在形式 (form)</p>
<p>以概念改變歷程來說，認知個體必須在概念生態達到不滿意的狀態才有概念改變的可能，但是若沒有理解、認為其合理、甚至是有利的便無法完全改變其概念；此為動態的特性。然而，認知個體在與他人對話中所獲得的「可理解」、「合理」甚至是「有利」的知識也不盡然為無誤之知識，因此，有可能再次轉而成為不滿意之狀態；若以認識論之觀點而言，即為「知識是暫時性的假設」；此為非線性的特性。</p>	<p>如上所述，認知個體之概念生態有可能再次轉而成為不滿意之狀態。換言之，即<u>每一個層次都有路徑可以回到先前的任何層次</u>；此為遞迴之特性。</p>

和過程 (process) 都有相關 (轉引自吳淑琳, 2001)

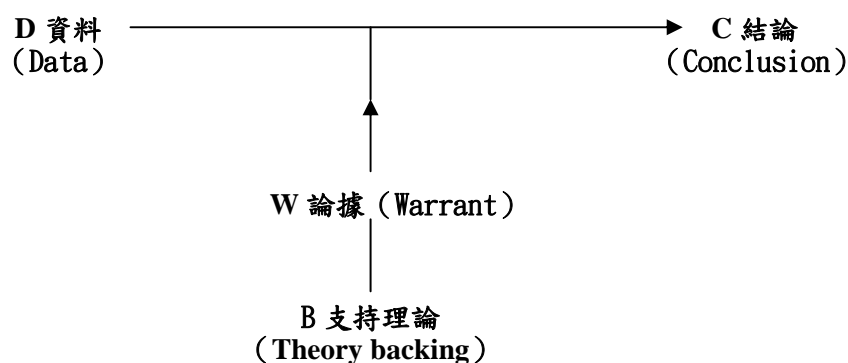
據上表之論述，研究者認為 Posner, Strike, Hewson & Gertzog (1982) 之概念改變理論具有 Pirie (1994) 之數學理解模型理論之動態、非線性、遞迴的相似之處。是故，研究者借鏡 Pirie 的數學理解之模型，據此表徵 Posner 等人之概念改變理論概念生態圖 (如圖二) 如下。



圖二 概念生態圖

二、Toulmin 之「D-W-C」論證模式

在談完學生概念學習的條件後，接下來，我們要再談論：教師該如何位學生佈置一個容易產生概念學習或概念改變的情境？對研究來說，該如何分析學生的概念學習或概念改變呢？其實，學生在教室中如何學習數學以獲得概念的理解一直是一個重要的議題(NCTM,1989; 2000)。許多研究者，像 Confrey (1994) 和 Labinowicz (1985) 都強調：了解數學最好的方式是一學生能夠主動參與自己的學習。依此觀點，「在教室中提供一個能讓學生主動參與自己的學習的環境」將是讓學生了解數學最好的方式 (Wood, 1999)。然而，在論證邏輯結構的研究上，Toulmin (1958) 提出「D-W-C」的論證模式 (如圖三所示)。在此模式中，「D」表示從外在現象中所蒐集到的數據或資料(Data);「W」為作推論時的佐證依據---論據(Warrant);「C」則表經由推論而得出的結論 (Conclusion)。此為論證架構中最基本的論證元素 (陳英娥, 2002)。Toulmin (1958) 進一步指出：一個合理的論證主要是由資料數據、推論依據、支持理論以及結論四個元素構成。科學家在構造其論證時，典型的必須給定大量的資料數據 (D)，依據這些資料數據得到一個主張或達到結論 (C)。他們被期待以推論依據 (W) 來保衛他們的結論，而這些推論依據通常是有支持理論 (B) 作為解釋基礎的。然而，在區分推論依據 (W) 與支持理論 (B) 時，Toulmin 的解釋是：支持理論通常保持不證自明的，它是在論證的外面，是被挑戰之前就已存在的 (引自陳英娥, 2002)。



圖三 D-W-C 論證結構 (Toulmin, 1958)

Toulmin 依此模式進一步指出：一個論證的有效與否，有很大的程度取決於論據背後的支持理論 B (Theory backing)。由 Toulmin 的論證模式可以了解，對同一現象造成差異詮釋的主因，在於不同個體背後支持理論的不同，與其因此而引用的論據、對現象的看法也就有所不同 (丁信中、洪振芳、楊芳瑩，2001)。

有鑑於此，本研究首先為學生佈置一個以「合作學習」為理論基礎的課室情境；接著，讓學生能夠熟悉「合作學習」共同討論，進而達成以對話方式促進數學概念學習之果效。接續，研究者以 Posner 等人的概念改變理論及 Toulmin 的論證模式分析該課室中學生之對話，企圖從中檢視學生在對話論證中概念的學習與改變。

參、研究設計與方法

一、研究方法

本研究主要以教室觀察與文件分析之方式進行探究。教室觀察包括合作學習情境中學生學習的錄影帶與錄音帶。並且，研究者也在現場中以教學札記之方式紀錄。至於文件分析部分則對學生在學習單之表現進行分析與探究。

二、研究參與者

本研究的主要參與者為研究者 R1 及 R1 所任教的一班高一的三位學生。至於研究者 R2 則是扮演諮詢者以及資料分析之三角校正者等後設分析之角色。以下茲將研究者 R1、R2 與學生之背景分述如下：

(一) 研究者 R1

研究者 R1 畢業於數學教育研究所，具有國中五年及高中四年之教學經驗。在本研究進行期間，研究者為自己所任教之高一學生佈置一個合作學習的情境，以「教師」的身分設計適合自己學生的教材，以「觀察者」的身分觀察學生在課程學習中的表現。

(二) 研究者 R2

研究者 R2 是某師資培育機構之教授。在研究期間，研究者 R1 先將課室中的錄影帶資料轉譯成文字，再由研究者 R2 重新觀看影帶配合文字檔以審視研究者 R1 所下的結論是否合理。藉此完成資料之三角校正，以達研究之信度。

(三) 學生

本研究由 R1 所任課之高中一年級學生為研究對象，屬便利性抽樣。本研究對象為某國立高中之一班高一三位女學生。其高中入學成績在該地區屬中上程度之學生。

三、研究工具

本研究所使用的測量工具為「數與坐標系」單元中「整數」的「學習單」。「學習單」之編製乃依據教師手冊（南一版）之教學目標逐一編製而成；每一道題目包括一個教學目標，因此具備內容效度。以下，茲將學習單與學後評量之內容作質性之分析（表二）如下。

表二 學習單內容分析

學習單	題號	內容
整數	1	能了解整數的除法原理，特別是： $0 \leq \text{餘數} < \text{除數} $ 。
	2	了解因數、倍數的相對意義，並能掌握因數、倍數性質。

據此，本研究透過學校二位資深教師與一位師資培育機構教授審閱修正研擬出學習單如下：

表三 學習單題目內容

學習目標	題目
能了解整數的除法原理，特別是： $0 \leq \text{餘數} < \text{除數} $ 。	已知除法原理： $a = b \cdot q + r (0 \leq r < b)$ 。試求： (1) 31 除以 4 之商與餘數。 (2) 100 除以 -13 之商與餘數。
了解因數、倍數的相對意義，並能掌握因數、倍數性質。	$a, b, c \in N$ ，若 $a bc$ ，則 $a b$ 或 $a c$ 為真？請說明你的理由。

四、資料蒐集與分析

以下，茲將研究目的、資料蒐集與資料分析方式整理如下：

表四 研究資料蒐集與分析對照表

研究目的	資料蒐集	資料分析
學生在合作學習情境中數學概念改變的情形	學習單、錄影帶、錄音帶	觀察、教學札記
促進學生數學概念改變的可能機制	學習單、錄影帶、錄音帶	觀察、教學札記
學生在合作學習情境中論證表現的情形	學習單、錄影帶、錄音帶	觀察、教學札記
促進學生論證行為發生的可能機制	學習單、錄影帶、錄音帶	觀察、教學札記

五、研究的信實度分析

本研究植基於意欲探究學生概念改變歷程之目的，故採 Posner 等人所發表之概念改變模式加以分析。然而，若希冀藉此將學生概念學習之歷程加以定位釐清，則勢必需形成一檢測之工具方能奏效。因此，研究者依據前述文獻探討 Posner 等人之論述形成以下分析學生概念學習、概念改變之歸準（如表五），期能使本研究之分析趨於一致而具效度。

表五 學生概念改變分析之歸準

條件	界定準則
不滿意 (dissatisfaction)	學生對原有概念產生懷疑。
可理解的 (intelligible)	學習者覺得此概念是可理解的、易於領悟的。他能以一種他熟悉的方式去說明、呈現此概念，而不只是單純的覆誦老師所教授的意義而已。
合理性 (plausibility)	學習者覺得此概念是可信的、合理的，則此概念必須和學習者所接受的概念是相融合的，不能有所衝突。
有利的 (fruitfulness)	捨棄原始的概念。學習者覺得此概念是合理的、有利的，則此概念必須能解決學習者過去學得的概念無法解決的問題，學習者覺得此概念是有幫助的。

然而，對於研究的信度而言，研究者 R1 將轉譯文字交由研究者 R2 重新審視，以判斷結論與主張之合理性。若有彼此意見相左之處，則進一步溝通、磋商以達意見之一致性。藉此完成資料之三角校正，以達研究之信度。以下，茲舉一例說明（如表六）：

表六 研究語料之信度考驗

語料	研究者 R1 註釋	協同研究 R2
D9109221001：第一小題很容易！四七二十八四八三十二…所以 31 除以 4 為 7 餘數是 3。	【1W：運用實例思考--B：除法原理—合理的】	■同意 □不同意
D9109223001：恩…沒錯。31 等於 4 乘 7 加 3…所以餘數是 3。	【3W：運用實例思考--B：除法原理—合理的】	■同意 □不同意

肆、研究結果分析

基於本研究之目的，研究者首先分別針對學生在整數單元各學習內容之表現進行報導—學生對於問題的論證 (argumentation) 過程，以及產生了哪些概念改變與概念學習；其次，再提煉數學學習中促進學生數學概念學習與改變以及促進學生產生論證行為的可能機制。茲分別描述如下。

一、學生數學概念學習與改變以及論證表現情形

在研究者的課室中，所有的學生是以 3 人為一組之異質性分組。然而，研究者發現：其中有一組同學，竟為了對話辯證而爭得面紅耳赤！此象徵著學生的概念生態形成不穩定的狀

態—亦即顯示課室中的論證已然發生；學生的概念學習與概念改變亦逐漸產生。礙於研究文本篇幅之限制，本研究擬從一組學生之對話進行報導，分別針對本單元各題進行分析。

(一) 學生在『能了解整數的除法原理，特別是： $0 \leq \text{餘數} < \text{除數}$ 』之表現

針對此學習目標，研究者據此編製題目為：已知除法原理： $a = b \cdot q + r (0 \leq r < |b|)$ 。試求：
(1) 31 除以 4 之商與餘數。(2) 100 除以 -31 之商與餘數。首先，描述他們之間的對話並針對其對話加以詮釋如下。(註¹；註²)

- D9109221001：第一小題很容易！四七二十八四八三十二…所以 31 除以 4 為 7 餘數是 3。【1 W：運用實例思考--B：除法原理—合理的】
- D9109223001：恩…沒錯。31 等於 4 乘 7 加 3…所以餘數是 3。【3 W：運用實例思考--B：除法原理—合理的】
- D9109222001：那第二小題呢？
- D9109221002：100 除以 -31…31 乘以 3…93…有了！100 除以 -31 得到 -3 餘數 -7！【1 W：運用實例思考--B：除法原理—合理的】
- D9109223002：等一下！除法定理餘數要大於等於 0 耶！【3 W：運用除法原理思考--B：除法原理—合理的】
- D9109222002：噫！對耶！【2 W：運用除法原理思考--B：除法原理—可理解的】
- D9109221003：那要怎麼辦呢？【1 W：運用除法原理思考--B：除法原理—不滿意的】
- D9109222003： $a = b \cdot q + r$ (手寫)…若 r 要為正…那麼 $b \cdot q$ 要比 a 小..那..【2 W：運用除法原理思考--B：除法原理—有利的】
- D9109221004：噫！你 -31 乘以 -3 不是 93 嗎？餘數不是就是 7 嗎？【1 W：運用實例思考--B：除法原理—合理的】
- D9109222004：對喔！【2 W：運用實例思考--B：除法原理—可理解的】
- D9109223003：等等…我還是不太懂耶！【3 W：No--B：No—不滿意的】
- D9109221005：你看！ $100 = (-31) \times \square + \circ$ (手寫) 是不是？所以摟， \square 應該是負數且乘起來要小於 100，這樣 \circ 才會是正數是嗎？【1 W：運用實例思考--B：除法原理—合理的】
- D9109223004：恩！【3 W：運用實例思考--B：除法原理—可理解的】
- D9109221006：那你猜猜看 \square 應該是多少？
- D9109223005：恩…-2…不對……-3 吧！接近 100！【3 W：運用實例思考--B：除法原理—合理的】
- D9109221007：所以答案就出來摟！
- D9109223006：喔！我懂了！【3 W：運用實例思考--B：除法原理—有利的】

接續，研究者以 Hewson (1996) 概念生態 (Conceptual ecology) 觀點以及 Toulmin 的論證模式分析學生的對話，茲整理如下：

1. 學生的概念生態發展歷程

從學生在本題的概念學習歷程，研究者發現：學生在學習數學概念時，必須認為它是可理解的 (intelligible)、合理的 (plausible) 甚至有利的 (fruitful)，才能產生真正有意義的

¹ 本研究語料之編碼為一組-年-月-日-學生-話語編號。

² 本研究針對語料之詮釋記於每句語料之後。依序為一學生-W：warrant--B：backing theory—概念生態狀態。

學習。此現象正呼應 Skemp (1971) 所述之關係性理解——知其然又知其所以然——知道數學概念的原因、原理，並能自行推理、推廣——才是有意義的學習。再者，此三位學生的概念形成方式亦有不盡相同的現象——學生 1 在討論互動的歷程中經常運用實例思考之方式幫助自己對此數學概念產生感覺 (make sense) (如：D9109221001、D9109221002、D9109221004…)；而學生 2 則有運用除法原理 (如：D9109222003) 以及運用實例思考 (如 D9109222004) 的方式促進思考之趨向。此二位學生在數學概念的學習歷程中可說是由自己的經驗出發，在對話論證中不斷澄清自己的想法 (如：D9109221003、D9109222003)，以幫助自己對於此數學概念的理解。學生 3 則由於無法運用自己的先驗經驗自行解決本題，而藉由對現況窘境的感知 (如：D9109223003)、同儕的指導對話進而瞭解 (intelligible) 本題之數學概念、最後完成此概念的學習 (如：D9109223006)。在此，也呼應了 Vygotsky 主張建構知識的認知功能是社會互動的產物，個體認知的發展是始於外在的社會活動而終於個體的內在活動 (劉錫麒，1993) 的論述。據此，研究者將此三位學生之合作討論過程 (如圖四) 圖示如下。

步驟		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
學生 1	不滿意											
	可理解的											
	合理性											
	有利的											
學生 2	不滿意											
	可理解的											
	合理性											
	有利的											
學生 3	不滿意											
	可理解的											
	合理性											
	有利的											

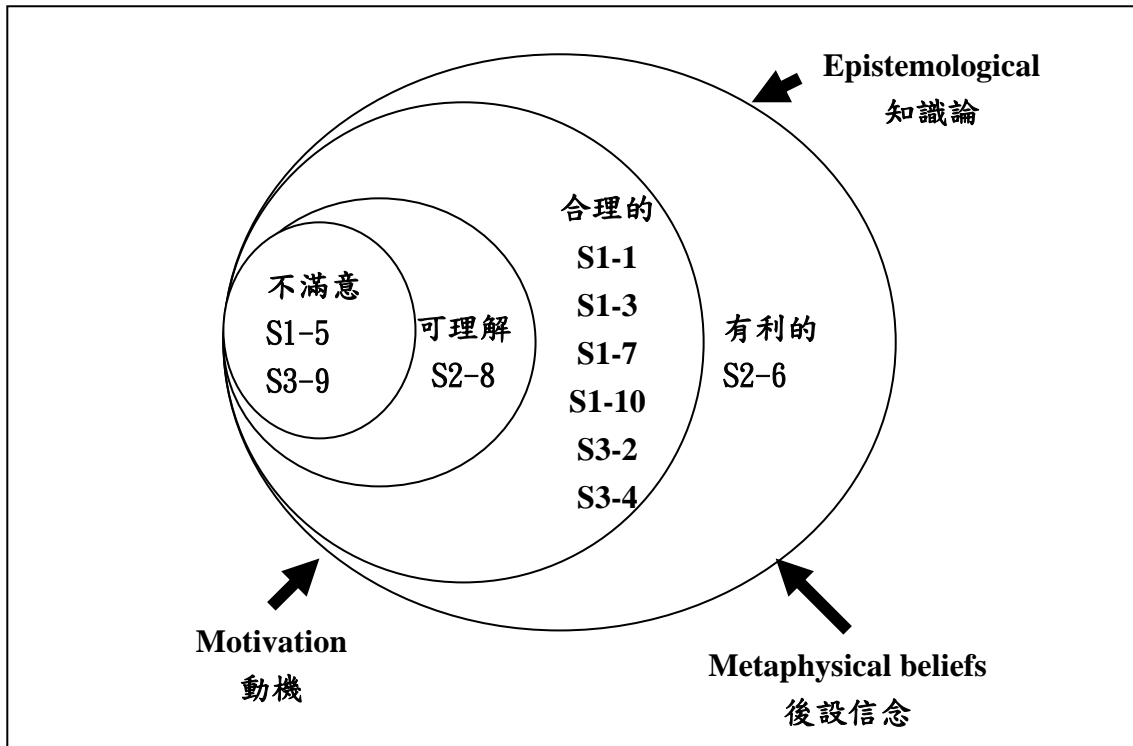
圖四 第一題合作討論過程圖

由此討論過程的表徵，研究者發現：學生 1 是本題中概念發展的主導者——藉由他不斷地導入說明，學生 2 則在學生 1 的引導下時以實例時以除法原理進行思考進而發展出此概念之學習；學生 3 則無法由自己提出論點解決問題，反之，他不斷地嘗試提出反駁同學論點的方法幫助自己思考，甚至提出自己不懂的狀態請教於同學，最終發展出此數學問題之概念。這顯現出教室中同儕論證對學生概念發展與學習的重要性。

藉此，研究者繪製學生之概念生態圖如圖五所示。由圖五學生的概念生態發展觀之，三位學生的概念發展可分為兩種類型：(1) 原先持有該概念但有瑕疵——學生 1 與學生 3 原先都存有此概念。然而在討論的過程中，同儕對其主張的質疑便形成學生對此概念之動搖機制，這使得學生能夠藉由互動的對話達到概念生態中的不滿意狀態，進而重新建構概念之理解。

(2) 原先未持有此概念——學生 2 原先對此概念並無深刻之想法。然而，在小組中藉由同儕的

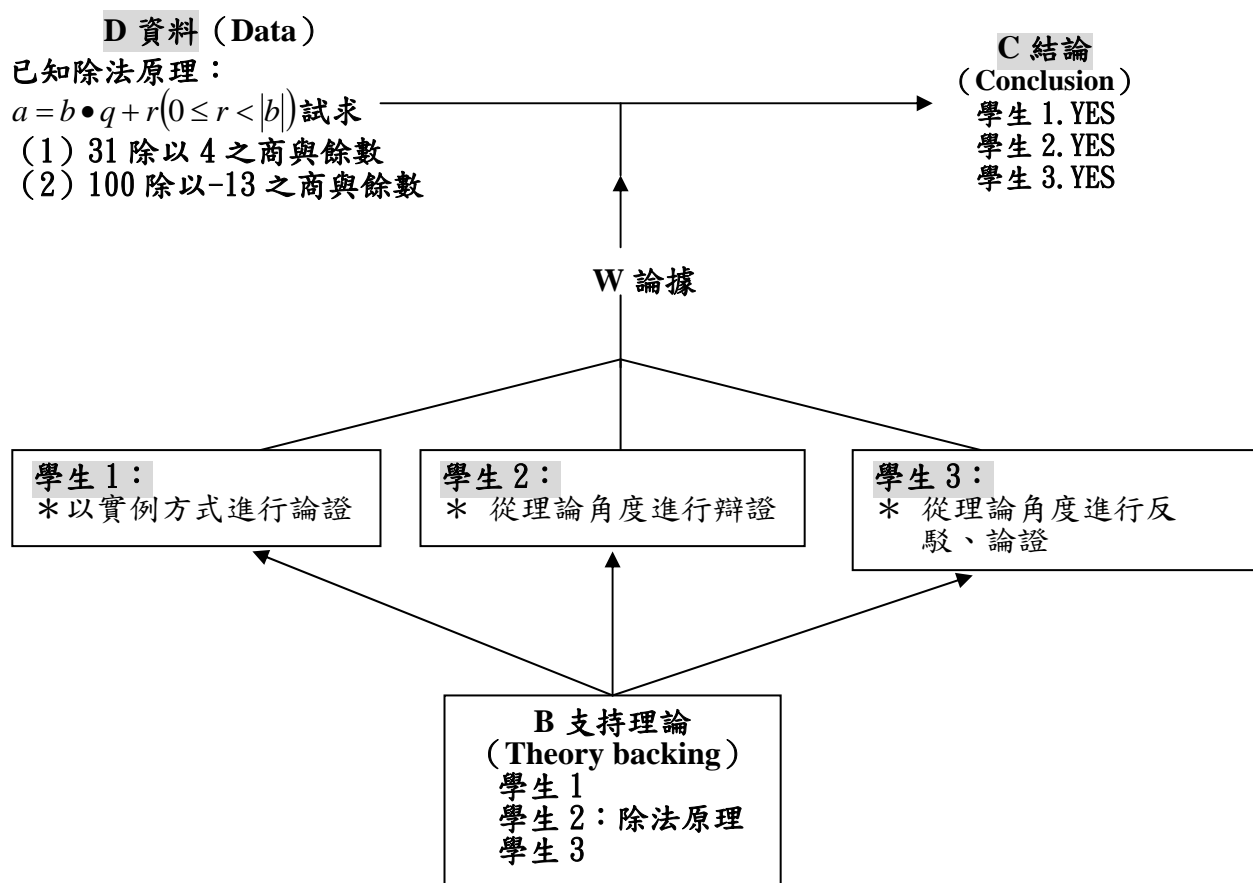
互動，使其對此概念產生建構之行動。



圖五 第一題學生學習歷程圖（註：圖中編碼：S 學生編號-階段）

2. 學生的論證內涵

由三位學生的論證過程觀之，他們論證的取向均呈現將「運用實例」與「運用理論」交叉作為其論據之基礎，只是在比重上有所不同（實例/理論：S1-4/1；S2-1/2；S3-4/1）。而其背後之支持理論均為除法原理。由此可見學生大多運用老師所教授之定理作為思考推理之基礎。學生 1 與學生 3 善於運用實例作為論據之方式進行說服同儕接受他的看法（如：D9109221001、D9109221002、D9109221004、D9109223004、D9109223005）；學生 2 則傾向運用定理與理論之方式進行辯證（如：D9109222003）。由此可見：教師必須針對學生不同的論證型態進行教學，方能達成促進課室論證與概念學習之功效。以下，研究者以 Toulmin 的論證模式分析學生的對話，並進行表徵如下圖六所示。



圖六 第一題學生論證模式分析圖

(二) 學生在『了解因數、倍數的相對意義，並能掌握因數、倍數性質』之表現

針對此學習目標，研究者據此編製題目為： $a, b, c \in N$ ，若 $a|bc$ ，則 $a|b$ 或 $a|c$ 為真？請說明你的理由。首先，描述他們之間的對話並針對其對話加以詮釋如下。(註³；註⁴)

D9109271001：這當然是對的。你看！ $3|6 \times 3$ 則 $3|6$ 且 $3|3$ 。所以這是對的。【1W：運用實例思考--B：因數定理—合理的】

D9109272001：恩。 $5|10$ 或 $5|2$ 則 $5|10 \times 2$ ，所以當然是對的。【2W：運用實例思考--B：正敘述等同於逆敘述；即將若 P 則 Q \equiv 若 Q 則 P—合理的】

D9109273001：我覺得你 (1) 好像錯了耶！你看！如果說 $10|2 \times 5$ 那麼 $10|2$ 或 $10|5$ 就錯了啊！【3W：舉實例思考--B：因數定理—合理的】

D9109271002：噢！可是你看！ $5|4 \times 5$ 則 $5|4$ 或 $5|5$ 阿！？【1W：運用實例思考--B：因數定理—可理解的】

D9109273002：可是我已經舉一個不符合題目的例子了，只要有一個例子說明它是錯的，那麼這理論就不對了阿！【3W：運用邏輯推理思考--B：邏輯推理理論—合理的】

³ 本研究語料之編碼為一組-年-月-日-學生-話語編號。

⁴ 本研究針對語料之詮釋記於每句語料之後。依序為一學生-W：warrant--B：backing theory—概念生態狀態。

- D9109273003：不然你說： $6|2 \times 3$ 則 $6|2$ 或 $6|3$ 這樣對嗎？【3W：運用實例思考--B：因數定理—有利的】
- D9109271003：恩，我大概懂了【1W：No--B：No—不滿意的】。
- D9109271004：比如說，『他們都是好人』—只要有一個人不是，這句話就錯了。【1W：運用實例幫助自己思考了解--B：邏輯推理理論—可理解的】
- D9109272002：恩，我覺得他（3）說得有道理，但是我還是覺得它是對的耶！【2W：No--B：No—合理的】
- D9109273004：你犯了一個錯！若 P 則 Q 應該是等於 $\sim Q \Rightarrow \sim P$ 才對！【3W：運用邏輯推理思考--B：邏輯推理理論—有利的】
- D9109273005：比如說，3 不整除 5 且 3 不整除 4 則 3 不整除 5×4 。而不是你說的那樣！【3W：運用實例思考--因數定理—合理的】
- D9109272003：恩，你說的老師也說過！【2W：No--B：No—可理解的】（沉思…）
- D9109272004：我瞭了【2W：No--B：No—可理解的】。
- D910927 師 001：你（3）呢？
- D9109273006：我剛已經舉出例子說它錯了，所以我覺得它是錯的【3W：No--B：No—有利的】。

接續，研究者以 Hewson (1996) 概念生態 (Conceptual ecology) 觀點以及 Toulmin 的論證模式分析學生的對話，茲整理如下：

1. 學生的概念生態發展歷程

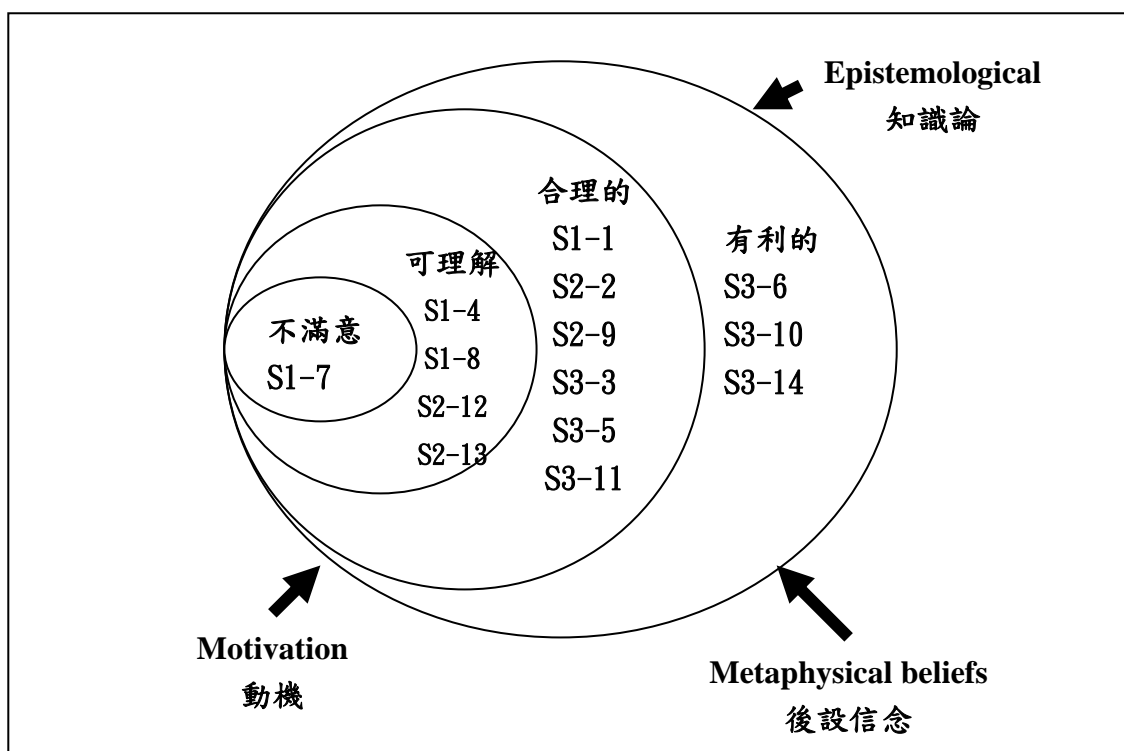
從此題學生的表現觀之：學生對於較為抽象之數學命題判斷大多傾向以實例之方式進行論證（如：D9109271001、D9109273001、D9109272001…等）。而運用實例進行反對對方論點之方式亦符合數學證明之形式。因此，研究者認為：運用實例進行論證與反對對方論點之練習對於學生學習數學證明是必要的。再者，當學生面對對方以實例反對論點時，似乎造成自身概念生態波動與不穩定，因此，便容易產生概念組織之重構（如：D9109273002、D9109271003）。而此題學生概念學生之情形—學生 1 常使用實例進行思考與理解（如：D9109271001、D9109271004）；學生 2 亦運用實例思考之方式促進自己對此命題的瞭解（如：D9109272001），然而，學生在此題之學習表現似乎是由學生 1 與學生 3 主導帶領小組的思考方向；至於學生 3 則以實例（如：D9109273001、D9109273003）與邏輯推理（如：D9109273002）之方式進行思考、以實例（如：D9109273005）以及邏輯推理（如：D9109273004）反對對方論點之方式進行概念之學習。據此，研究者將此三位學生之合作討論過程（如圖七）圖示如下。

步驟		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
學生 1	不滿意							■							
	可理解的				■				■						
	合理性	■													
	有利的														
學生 2	不滿意														
	可理解的												■	■	
	合理性		■							■					
	有利的														
學生 3	不滿意														
	可理解的														
	合理性			■		■						■			
	有利的						■				■				■

圖七 第二題合作討論過程圖

由此討論過程的表徵，研究者發現：學生 1 與學生 2 在本題概念學習的表現中，均持有不完全正確的另有想法。透過學生 3 以實例、邏輯推理的論證 (arguments)，協助學生 1 與學生 2 對自己思考他們所持的想法產生無法解釋之處進而提出維護自己想法的論點，再經由學生 3 又一次的以實例以及邏輯推理理論進行批判，終能使學生 1 與學生 2 重構原先持有的概念，達成概念改變。若以 Lakatos 的科學研究綱領理論而言，學生 3 第一次以實例與邏輯推理方式駁斥學生 1 的論點，而學生 1 將之駁回的歷程觀之，即是學生 1 以保護帶維持硬核的行為表徵；而學生 3 第二次的再次批判終能造成學生 1 的概念改變之歷程，即是學生 1 硬核的摧毀而達成概念學習。鑑此，研究者認為：無論是從 Piaget 的基模同化調適理論而言，或是 Posner 的概念改變理論來說，要造成學生概念改變或產生概念學習，均要思考學生概念生態的不穩定性觀點—唯有學生概念生態產生不穩定的狀態，學習才有可能產生。

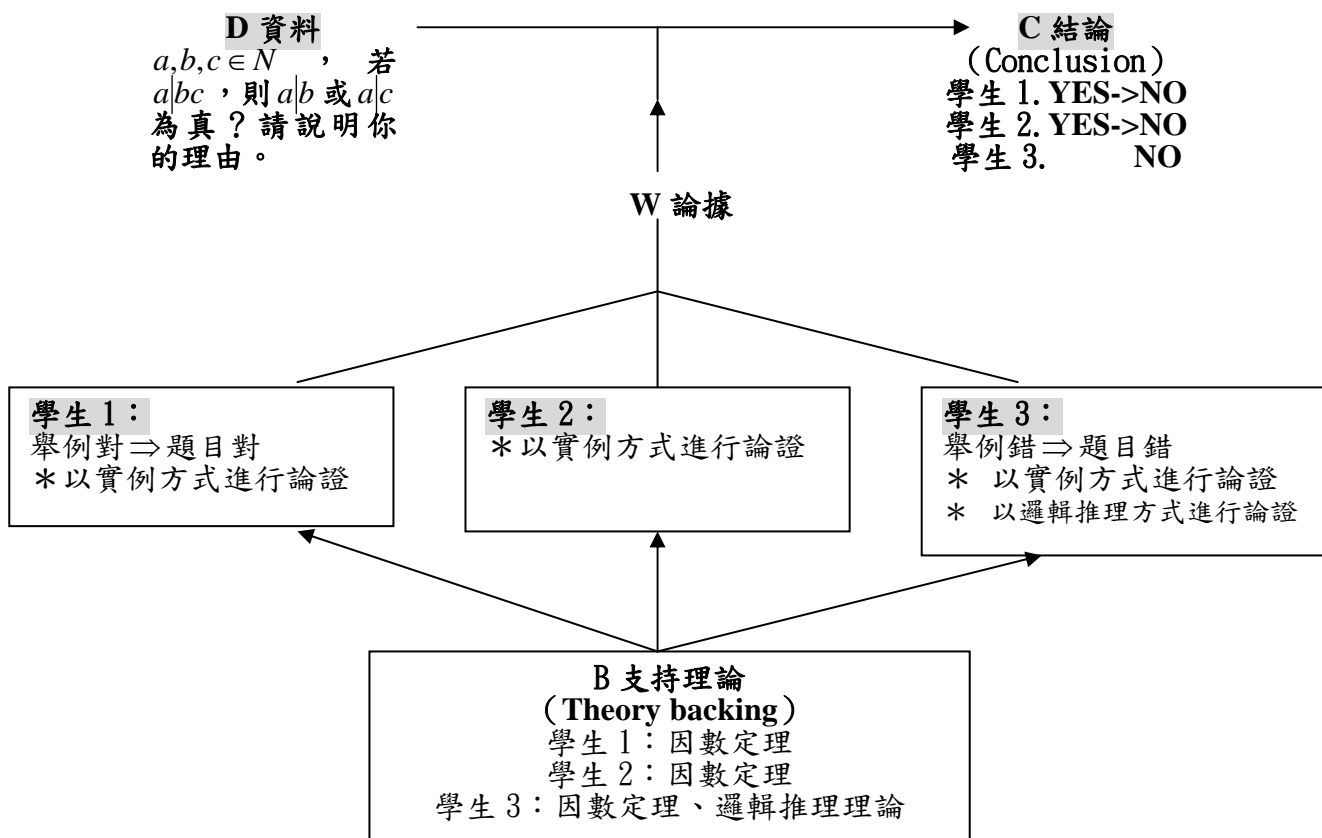
據此，研究者將此三位學生之概念生態表徵如下 (圖八) 所示。由圖八學生的概念生態發展觀之，三位學生的概念發展可分為三種類型：(1) 原先持有該概念且該概念為正確—學生 3 原先已持有此概念，且為正確的概念。透過同儕討論的過程，他 (學生 3) 以實例、邏輯推理的方式交叉運用企圖說服同儕接受他的想法，最後終能造成同學的概念學習；(2) 原先持有該概念但有瑕疵—學生 1 對於因數定理的概念本已持有概念 (如：D9109271001)，但卻是不週全而存有另有概念，接連幾次與學生 3 的對話 (D9109271001~D9109271003)，讓他 (學生 3) 對於所持的想法產生不滿意進而促成概念改變；(3) 原先為持有此概念—學生 2 在面對題目時，起初並沒有很明確的想法與定見，在同儕間的對話中循著同學的引導逐漸形成對此概念的雛型，進而再精煉思考與想法，最後形成對概念的理解。



圖八 第二題學生學習歷程圖 (註：圖中編碼：S 學生編號-階段)

2. 學生的論證內涵

由三位學生的論證過程觀之：他們論證的取向大多以「運用實例」之方式進行對話；說服同儕接受他的看法（如：學生 1-- D9109271001；學生 2-- D9109272001）；而學生 3 則以「運用實例」與「邏輯推理」之方式與同儕對話（如：D9109273001、D9109273002、D9109273003）。而其背後之支持理論則為因數定理與邏輯推理理論。顯然地，學生 3 似乎較具備正確的數學邏輯觀。由本題三位學生的表現而言，再一次證實教師必須針對學生不同的論證型態進行教學，方能達成促進教室中論證與概念學習之功效。以下，研究者以 Toulmin 的論證模式分析學生的對話，並進行表徵如下圖九所示。



圖九 第二題學生論證模式分析圖

二、促進學生數學概念學習與改變機制以及論證表現傾向之探討

由上面所報導學生概念之學習與論證之表現，研究者首先將學生個人之概念學習路徑以及論證風格加以彙整，並從此資料中臆測概念學習與改變以及促進論證之可能因子。茲整理如下表七所示：

表七 學生概念學習與論證因子之臆測表

學生	概念學習路徑	論證風格	概念學習因子	論證因子
1	題 1: p-p-d-p-p 題 2: p-i-d-i	題 1: 實例 (4)、理論 (1) 題 2: 實例 (3)	合理解釋 不滿意	實例 理論
2	題 1: f-i 題 2: p-p-i-i	題 1: 實例 (1)、理論 (2) 題 2: 實例 (1)		
3	題 1: p-p-d-f 題 2: p-p-f-f-p-f	題 1: 實例 (4)、理論 (1) 題 2: 實例 (3)、理論 (2)		

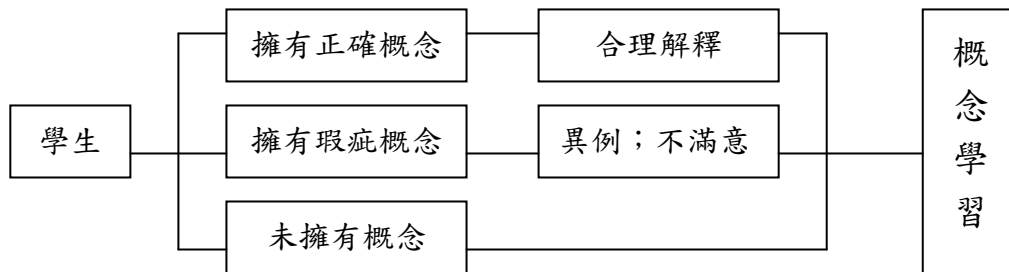
(註: d- dissatisfaction; i-intelligible; p-plausible; f-fruitful)

由上表七學生之學習表現，以下，茲分述學生概念學習之機制與論證表現之傾向：

(一) 學生概念學習之機制

研究者發現：學生概念學習之情形可分為三類：(1) 對該概念持有想法且為正確—擁有此種情形之學生其在概念之學習遇有新的問題情境總能平順地運用所持之知識進行學習並且沒有困難。因此，他的概念狀態會在『可理解的』、『合理的』、『有利的』階層中遊走（如：學生 3-題 2）。若以 Lakatos 科學研究綱領理論而言，即是硬核的強化。(2) 對該概念持有想法但有瑕疵—擁有此種情形之學生在概念學習時若遭新情境或同儕之反對而質疑時，便容易引起自身概念生態之不穩定，進而修正自身所持該概念的想法。因此，他的概念狀態會經過『不滿意』的階層（如：學生 1-題 1, 2；學生 3-題 1）。若以 Lakatos 科學研究綱領理論而言，即是保護帶不斷遭受攻擊而致使硬核最後摧毀。此結果與 Piaget 所提：基模的失衡是促進認知改變之重要因素相互呼應。(3) 對該概念並無想法—擁有此種情形之學生能夠在同儕間的對話中學習新的概念（如：學生 2-題 1, 2）。值是之故，研究者臆測學生概念學習與改變的可能機制為「合理解釋」與「不滿意」。

鑑此，研究者將本研究所得概念學習機制之結果圖示（如圖十）如下：



圖十 數學概念學習之機制

(二) 學生論證表現之傾向

研究者發現：學生論證之風格有兩類：(1) 傾向以「運用實例」進行論證—無論從「實際數字結構」的第一題或是「抽象符號結構」的第二題，多數學生傾向「運用實例」促進思考與進行與同儕對話，這樣的做法有助於學生的推理與理解（make sense）。(2) 傾向以「理論」進行論證—然而，亦有一些學生喜歡運用「理論」作為自己的論證基礎，藉此說服他人，這樣的做法有助於建立學生之論證力量（power）。(3) 傾向以「運用實例」與「理論」進行論證—當然，學生亦交叉使用「實例」與「理論」作為自己的論證基礎，以作為自己的論據。因此，研究者認為教室中論證機制的引發則應歸屬於老師是否營造學生對話的情境以促進同儕論證的表現。唯有老師不斷地鼓勵學生發表自身之想法與論據，才能豐富教室中學生論證的表現。

伍、綜合討論（兼論研究限制）

透過本研究之呈現，研究者發現：教學不能只是告知學生或向學生展示知識，教師必須要讓學生經由自己的思考與推理、對話溝通去創造意義。只有在學生概念生態產生不穩定的狀態下，學生才會去改變自己既有之概念結構。對學生而言，其概念的生態達到可理解的（intelligible）層次並不代表學生就會去使用它，學生心中或許會有兩套標準存在，並會視實際情況（如考試與平時生活）予以交替使用、解釋與自圓其說。因此，如何提升學生的概念認知達到合理的（plausible）甚至有利的（fruitful）層次，便是教學活動應該重視的問題。

再者，本研究以 Toulmin 的論證模式分析學生數學課室中的對話發現：其實，數學教室裡充滿了豐富的論證內涵。從研究中，學生們對於論證的取向包括了運用實例與運用理論之論證，這樣的結果亦讓現場教師體會：除了盡量佈合適之論證題型外，尚須鼓勵學生多思考、辯證以營造論證之氛圍，方能使課室中的學習更為意義化。

然而，研究終有其特性與限制，研究者提出以下關於本研究之建議提供後續研究之參考：

一、因個案學生而具研究之個殊性？

本研究乃從研究者自身之課室中選擇一組學生在合作學習情境中的對話分析而成，其學生之論證取向包括運用實例與運用理論等二種主要方式，然此結果是否涵括所有學生之論證表現？理應有後續研究加以檢驗方能推論。再者，研究者所選取學生學習之單元為高一「整數」之單元，學生學習之表現是否因數學素材而有不同結果之呈現？亦需再進行辯證與分析。因此，研究者建議未來之研究可再增添研究之人數與代表性，以使研究更能產生推論之價值。

二、學生之學習成效因此而真正提升？

從本研究之結果發現：學生在課室之論證似乎因同儕異例之反對質疑而產生數學概念之學習與轉變。然而，是否能感知合理的（plausible）甚至有利的（fruitful）？似乎應再佈以後測之研究方能下此斷語。因此，研究者建議後續之探討可再增加此部分之實施，以增進學生學習之判斷。

三、概念生態之定位需更清楚之工具予以釐清？

本研究運用 Posner 等人概念改變模式與 Toulmin 論證模式探究高一學生在「數」單元的學習表現。然而，研究者在資料分析時乃運用 Posner 等人之論述形成概念狀態之分析工具，嚴格來說只做到概念性定義而尚未做好操作性定義之釐清，因此，研究者建議未來後續之研究應考慮操作性定義之效化，以使研究更為嚴謹。

註：感謝審查委員對本文之評述與建議，對於作者進行本文最後修訂具有相當大的啟發性，在此特別致謝。

參考文獻

- 丁信中、洪振芳、楊芳瑩 (2001): 科學理論形成與精煉過程對科學學習的意涵。科學教育月刊, 240, 2-13。
- 王美芬、熊召弟、段曉林、熊同鑫 (1996): 科學學習心理學。台北: 心理出版社。
- 巫正成 (2000): 數學對話促進國一學生數學理解之個案研究。國立高雄師範大學數學系碩士班碩士論文, 未出版。
- 吳淑琳 (2001): 國中生線型函數概念發展之個案研究。國立台灣師範大學數學研究所碩士論文, 未出版。
- 陳英娥 (2002): 教室中的數學論證之研究。教育研究資訊, 10 (6), 111-132。
- 曾志華、甄曉蘭 (2003): 建構教學理念的興起與應用。 <http://paper.nt1.isst.edu.tw/html>
- 劉錫麒 (1993): 數學思考教學研究。台北市: 師大書苑。
- Confrey, J. (1994). A theory of intellectual development (Part 1). *For the learning of Mathematics*, 14(3), 2-8.
- Labinowicz, E. (1985). *Learning from children: New beginnings for teaching numerical thinking: A Piagetian approach*. Menlo Park, CA: Addison-Wesley.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Peter W. Hewson (1996). Teaching for Conceptual Change. *Improving Teaching and Learning in Science and Mathematics*. Teachers College, Columbia University.
- Posner, J., Strike, K., Hewson, P., & Gertzog, W. (1982). Accommodation of a scientific conception: Toward a theory of conceptual change. *Science Education*, 66, 211-227.
- Skemp, R. R. (1971). *The psychology of learning mathematics* (1st ed.). Harmondsworth: Penguin.
- Toulmin, S. (1958). *The use of argument*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Wertsch, J.V. (1985). *Vygotsky and the social formation of mind*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Wood, T. (1999). Creating a Context for Argument in Mathematics Class *Journal of Research in Mathematics Education*, v 30, 2, 171-191.

Senior High Students' Mathematical Conceptual Learning on the Tasks about Integral
Number under the Cooperative Learning Context : Analyzing by Posner's
Conceptual Change model and Toulmin's Argumentative Model

Yen-ting Chen¹ Shian Leou²

¹Department of Early Childhood Education,
Chung Hwa College Medical Technology

²Department of Mathematics ,
National Kaohsiung Normal University

Abstract

This paper reports three first-grades of senior high school students' performances on the tasks about integral number. This paper is a qualitative research. The first purpose of this study was using Posner's (1982) conceptual change model (CCM) to inquiry how the three first-grade of senior high school students make others' conceptual ecology becoming unbalance by their dialogues and to bring their conceptual changing under the cooperative learning context. The second purpose of this study was using the framework proposed by Toulmin (1958) to inquiry the three first-grade of senior high school students' argumentative performances. The collected information include the videos coding data recorded the process of the three students' learning and the individual student's papers. The main results were : (1) The three students would change their conceptual framework after their conceptual ecology becoming unbalance through communicating, thinking and reasoning with each other. (2) The approach of the three students' argumentation included visual experienced argumentation, using examples argumentation and formal theory argumentation. Above all, the teacher should construct a learning context in which students can thinking, having argumentation and meaningful the mathematical learning.

Key words : cooperative learning 、 mathematical conceptual learning 、 conceptual change model 、 argumentative model