一位國小五年級學生對比值問題的解題表現

張育萍　劉祥通

國立嘉義大學數學教育研究所

（投稿日期：94 年 1 月 21 日；修正日期：94 年 2 月 14 日；接受日期：94 年 2 月 22 日）

摘要

本研究在探討一位國小五年級學生對比值問題的解題表現。以個案研究法為主軸，並採取工作單為基礎進行訪談。工作單上的問題共有 7 題，分析時將有相同解題表現的問題列為同一原案，共 3 個原案。其中研究結果最特殊的發現就是：學生不易將等號視為等價式，且利用「一份中所佔的比值」方式解題，因此能以分數形式表示比值的結果而不是以小數表示。

關鍵字：比值、個案研究、工作單為基礎的訪談、分數

通訊作者：劉祥通　liust@mail.ncyu.edu.tw　05-226-3411 ext 1922

壹、緒論

比值對國內許多人而言不外乎就是比的數值化，例如 a 與 b 的比 a:b，其比值爲以$\frac{a}{b}$這樣的分數形式的數值呈現，因此往往比值都被安排在比例的前一單元進行，爲了就是要幫助學生能方便解決由兩個以上的比所形成的比例關係問題，而這樣的課程安排方式似乎窄化了分數中的比值構念，喪失了比值問題原有的涵義以及限制了它的推廣性。

Lamon（1999）認爲比值是任意的兩個度量（測度）空間（measure space）所合成的一種量數（measure）；而比率是指不同度量空間下所合成的一種量數，例如速率是由距離 a 公里與時間 b 小時合成的新量數$\frac{a}{b}$（km/hr），這樣產生的新量數是一般常見的比率，但它也是比值問題的一種。因此，Lamon 認爲比率是比值的其中一種類型（如圖 1-1），比值可以分爲相同度量空間與不同度量空間的兩種不同類型，相同度量空間下比值可以是部分-整體或是部分-部分兩種問題形式的探討，而在不同度量空間下的比值則視爲是比率問題的探討。

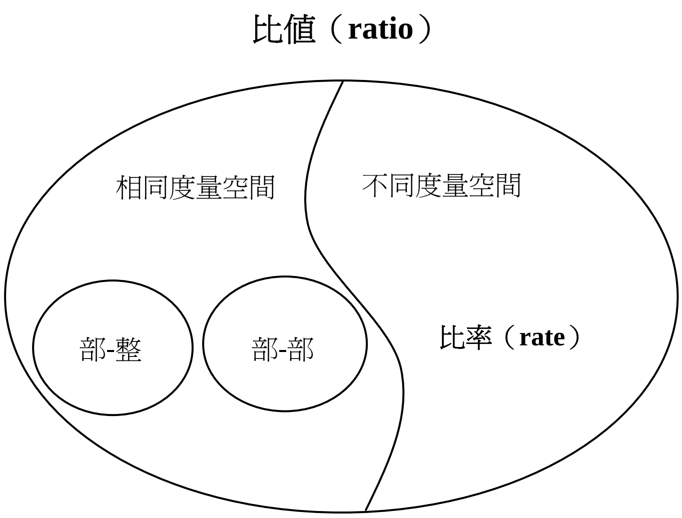


圖 1-1 Lamon 的比值類型

而劉祥通（2004）建議現行國小數學教材應將比值的定義縮小，也就是定義比值爲兩個相同度量空間下的對照值，以避免在比值的教學活動下，而混用了比

率的例子，也就是將 Lamon 的比值範圍縮小為與比率平行地位的相同度量空間下合成的量數（如圖 1-2），且他也在教材與教學上建議，比值應先安排，而後比率。

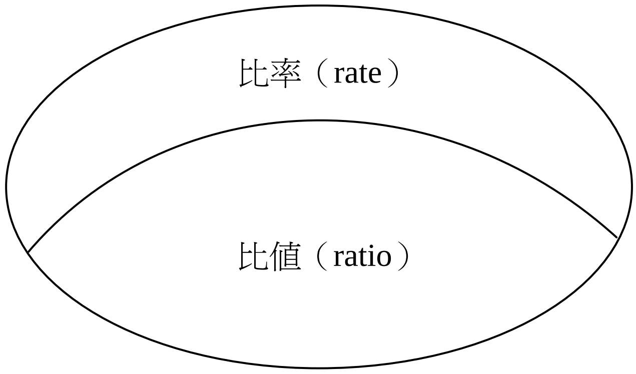


圖 1-2 劉祥通建議的比值比率關係圖

但是受限於語言的關係，「百分率」與「圓周率」兩名詞中皆有「率」的字眼，因此一般人容易對此兩種問題產生誤解，將此兩種問題誤認為是比率問題，但是從定義上來看，「百分率」與「圓周率」問題實際上是在探討兩相同度量空間下的數量關係，因此應該是比值問題。

本研究為了將比值與比率問題做一區隔，因此，研究者由兩個相同度量空間下的量數之比較，來探討學生在比值問題上的解題表現。

貳、文獻探討

概念的力量在於它可以統合並聯繫各種不同經驗或經驗的分類（Skemp, 陳澤民譯，1995），而學生的解題表現往往需要倚賴概念的理解。所以學生的解題表現仰賴他們自身對概念的同化與調適；概念又可從各種經驗的累積、統整而增長，因此本研究從不同類型的比值問題來檢視學生的解題表現及對分數中的比值構念的理解程度。以下文獻將從比值問題的基本涵義—包含除、常見的策略—基準化、常犯的錯誤—比值的迷思概念，三部份來探討。

一、包含除

包含除是在探討兩相同度量空間下的兩量關係，如圖 2-1 所示，在 M1、M2 兩度量空間下，已知 M2 度量空間下的兩量數 b、d；M1 度量空間只知一個量數爲 1，另一量數未知，在兩度量空間存在的條件下，探討 b 與 d 間的關係或是 1 與未知數間的關係，即是包含除問題。

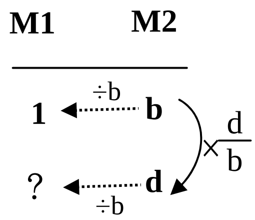


圖 2-1 包含除關係

Vergnaud（1983; 1994; 1996）認爲解包含除問題需要先具有兩個以上的認知步驟，也就是（1）找出 d 是 b 的多少倍，例如，「巧克力每段長 2 公分，現在有 5 公分的未切割巧克力，可以切成多少段？」，這樣的問題可以從 **5 是 2 的多少倍**的方式來求解，寫成算式形式的話，就是 $5\div2=\frac{5}{2}$段（2.5 段）；或是（2）應用反函數係數（the inverse functional coefficient）$\frac{1}{b}$，找出 M1 度量空間下的未知數，也就是由先由 1 **公分是**$\frac{1}{2}$**段**而求出反函數係數$\frac{1}{2}$，進而找出 5 公分即是$\frac{5}{2}$段的方式。但是一般說來，學生通常較習慣第一種的方式來求包含除的問題。然而這兩種運算雖然在數學上是等價的，但是在概念上卻是不同的事情。第一種認知步驟需要找出純量比值（scalar ratio），也就是$\frac{5}{2}$；而第二種認知步驟則需要利用 M1 與 M2 兩度量之間暗隱的函數比率(functional rate)，也就是反函數係數$\frac{1}{2}$來找出度量與度量之間的反商（inverse quotient of dimensions）$\frac{5}{2}$。Vergnaud（1983）將探討這樣的四個量數 1、？、b、d 之間的關係視爲乘除法問題中的包含除問題，但因本研究旨在探討比值構念，亦即討論相同度量空間下兩量數間的比較關係，故純量比值較爲接近本研究的議題，而運用反函數係數找未知數，則牽涉到需藉由不同度量空間下的量數來尋找，是比較困難的，故暫不列入考慮。

二、基準化

基準化（norming）通常是先形成一個集聚單位，而後再以此單位重新詮釋原本的情境（Lamon, 1994，p.94）。如同 Freudenthal（1983）所說「若將地球的

直徑想像成如大頭針頭般的 1 毫米大小，那麼太陽則爲一直徑 10 公分長且與地球距離 10 公尺遠的球體」，這樣的想法，就是將地球的直徑當成一基準量來基準化其他的量，就是一「基準化」的過程。

因此，假如「有 5 塊批薩，若要每 2 塊批薩裝成一盒，那麼全部可以裝成幾盒？」，這樣的題目，即是以集聚單位 2 **塊**來加以重新詮釋新情境**可以裝成幾盒**，則可以看成是分配數的過程，也可詮釋爲**基準化**的過程，這樣的一個過程需要選擇一個除數來當作是新的基準單位，並以此基準單位重新詮釋被除數（Lamon, 1994）。5（被除數）被重新以一新的集聚單位 2，也就是除數，來加以詮釋，5 以 2 重新加以做基準化的詮釋後，可以轉換成 $2\frac{1}{2}$個 2，亦即$\frac{5}{2}$，雖然這樣的方式是在解等分除問題，也就是求商，但若以同樣角度來爲兩量數間的關係做詮釋，亦即 5 塊批薩是 2 塊披薩的多少倍，這樣的比值問題，也可以視爲是將 2 當成基準量（新的集聚單位），加以利用基準化幫兩量數間的倍數關係做詮釋。

三、比值的迷思概念

迷思概念（misconception）的產生通常是與一般正式的知識相違背，而數學教育的迷思研究，可以幫助了解學生的想法，同時並藉由提供教學經驗可以幫助學生發展並接受新概念（Graeber, 1993）。

學生在解小於 1 的有理數乘除法文字題時，往往會有「乘變大」、「除變小」的迷思概念（Fischbein, Deri, Nello, & Marino, 1985; Graeber, 1993），同時也會有除法是大數除以小數（Hart, 1981）的迷思存在。在劉祥通（2004）的研究中發現，<u>小豪</u>的「只有大於 1 的比值才可稱爲倍」的迷思影響了他的比值，以致於解比例關係問題失敗，例如面對「甲繩長是 7 公分，乙繩長是 3 公分，請問乙繩的長度是甲繩的多少倍？」，<u>小豪</u>雖知道利用 7 公分當基準量求出兩數量的關係，但是由於他對小於 1 的比值也可稱爲倍的不熟悉，因此導致他無法回答乙繩是甲繩的多少倍，此外，他的研究也發現，學生對於小於 1 的比值會有附帶「單位」的迷思，例如<u>小灝</u>將 7 公升佔 9 公升的$\frac{7}{9}$「倍」表示成$\frac{7}{9}$「公升」。

劉祥通（2004）同時也指出比值構念的認識有賴「基準化」能力的建立，在他的研究中發現小琪在求「一枝毛筆的長度是 19 公分，一枝鉛筆的長度是 15 公分，請問鉛筆的長度是毛筆的幾倍？」的比值問題時，犯了「大數除以小數」的迷思，將 15÷19 誤以 19÷15 解題，無法以較大的數當作基準量，這樣的問題顯現小琪無法正確的確認比較量與基準量，除此之外，她雖以 19÷15 求解，但是她的最後答案中卻出現 19÷15＝1…4＝$1\frac{4}{19}$，將商 $1\frac{4}{15}$中分母的位置 15 錯認爲是 19，也就是錯把 19 當成是基準量。

參、研究方法

本研究旨在探討一位國小五年級學生對比值問題的解題表現，屬於個案研究，利用工作單爲基礎的訪談（task-based interview）（Goldin, 2000）幫助研究者深入地探討學生關於分數的比值構念問題解題表現。以下將分別從研究對象、研究工具、與資料分析三個部分討論：

一、研究對象

本研究採用立意抽樣（purposeful sampling）的方式，選擇一位未接受過比值教學的學生作爲本研究的研究對象。參與本研究的個案—小亭（假名）是一位國小五年級的學生，就讀學校位於彰化縣，是一典型的鄉村學校。小亭在她的班級上表現屬程度較高的學生，與全班比較，她在數學以及語文上都有不錯的表現，在解比值工作單問題前，小亭除了在社會領域中學習過比例尺縮圖概念外，並未接受過任何相關的比值教學。

二、研究工具

由於本研究是以工作單爲基礎的訪談，資料主要是運用研究者與工作單來蒐集，因此以下將就研究者立場與工作單分別敘述之：

（一）研究者立場

研究者在研究的過程中扮演著研究設計與訪談個案的角色，研究者根據工作單問題上學生的初始解題表現，而對研究對象加以深入地訪談，追問學生的想法。

在研究設計上，研究者以「甲數是乙數的多少倍？」、「甲數是乙數的幾分之幾？」或是「甲數是乙數的多少？」這樣的題目設計，用來做初步地檢視學生是否能夠判斷比值，之後研究者再根據學生工作單上的解題表現加以訪談以深入了解她的理解情形；再者，由於一般學生往往是藉由除法解題，而獲得小數的比值，因此研究者安排部份的題目其比值是可以用小數表示的，此外，爲了解學生是否能用分數表示比值，也呈現部份題目用除法解題後將會是無窮小數，以檢視學生是否能以分數呈現。

在訪談過程中，研究者爲了不以學生會正確運算爲滿足，因此會針對學生的回答繼續追問，也就是唯恐學生只會以正確運算求解，而不理解運算的意義，所以在訪談過程中研究者將鼓勵學生先用自發性解法以求比值，並從中了解學生是否能確認題目中那個量數才是基準量。

（二）工作單

工作單主要是要用來蒐集小亭比值構念的初始解題表現，以檢視小亭運用何種策略解比值問題。因爲小亭尚未接觸過相關的比值題目，因此工作單上的題目需要事先安排好，題目主要是針對包含除與基準化概念來設計，文字上以學生能夠理解的形式呈現題目，避免出現艱深的數學辭語。

工作單內的題目主要從學生易有的比值迷思探討，有**大數除以小數**、**小數除以大數**、**能否找出正確的基準量**、**比值無單位**、**比值可以小數表示**五個特性的考量，共有七題問題，其中的問題都會有著重複出現數個特性的設計，例如「一籃蘋果有 10 顆，現在媽媽再買 5 顆放進去，那麼原來的蘋果數應該是現在的多少倍？」這樣的題目有大數除以小數、找出正確的基準量、比值無單位的考量，而「一張白紙折成 5 等份，假如將其中的 2 份塗成紅色，請問紅色的部分是整張白紙的多少倍？」則有著小數除以大數，比值無單位與比值可以小數表示的考量。

三、資料分析

訪談過程中，研究者利用錄音方式收集研究者與研究對象的訪談內容，在訪談結束後，將訪談錄音內容進行轉錄、分類、編碼，並配合學生的紙筆紀錄，以

轉成可供分析的原案（protocol），幫助研究者進行原案分析（protocol analysis），而原案分析是以重複的情節（episodes）（甯自強，1998）爲分析單位，以檢核學生的比值構念。研究者在學生解完所有問題後，針對所有問題一一做訪談以更進一步了解學生的想法，待研究結束後，研究者將研究對象有重複的解法加以分類，分別安排於同一原案來討論，並將問題順序重新編碼，將相同類型的問題放在一起比對，以藉著增加研究的內在效度（Yin, 尙榮安譯，2001），同時限於篇幅，且爲了避免訪談內容的重複性過高，因此在相同原案中的訪談，僅挑選具代表性的問題訪談內容置於原案中討論。

編碼時，日期將以 6 碼呈現，例如 931105 代表民國九十三年十一月五日；問題訪談則以 4 碼呈現，前 2 碼代表問題編號，後二碼代表轉錄資料行號，例如 0211 即代表問題二的行號 11。

肆、研究結果與討論

研究者從小亭的七題工作單解題中分析討論，並將有相同表現的問題列爲同一類型的原案，以下將分別就此七題三個原案的初始解題表現與訪談結果，分別進行探討。

（一）利用等分除的方式找出「一份所佔的比值」，以幫助求比值

小亭利用等分除的方式，找出每一份所佔的比值，似乎是利用兩度量空間之間的反函數係數，以幫助求出實際的比值，爲了解這樣的現象，因此研究者將針對小亭求出的「一份所佔的比值」加以訪談，以了解她是否理解反函數係數。

原案一（931112）

問題一：一張白紙折成 5 等份，假如將其中的 2 份塗成紅色，請問紅色的部分是整張白紙的多少倍？

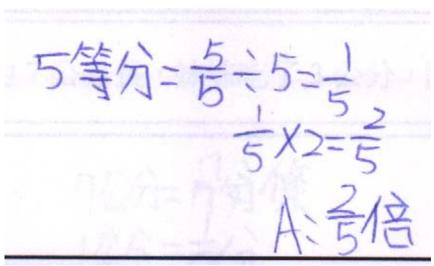


圖 4-1 問題一的初始解題

問題二：一條巧克力 9 公分長，妹妹吃了 4 公分，請問妹妹吃掉的部分是原來巧克力的多少倍？

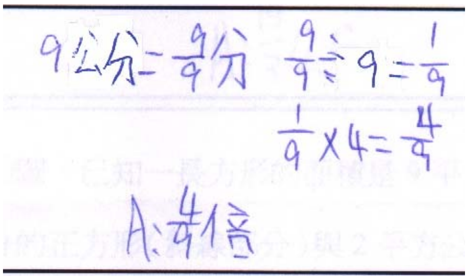


圖 4-2 問題二的初始解題

（問題一訪談）

0101 I：妳把 5 等分看成是$\frac{5}{5}$÷5，得到$\frac{1}{5}$，所以這個$\frac{1}{5}$是什麼？

0102 S：這個（指著$\frac{5}{5}$）除以這個（5）的

0103 I：所以這個$\frac{1}{5}$是代表…？

0104 S：一份是$\frac{1}{5}$

0105 I：是誰的$\frac{1}{5}$？

0106 S：全部的！

0107 I：然後呢？

0108 S：所以現在 2 份是 1 份的 2 倍，所以是全部的$\frac{2}{5}$！

分析一

小亭在問題一與問題二的解法都是利用等分除的方式，先求出「一份所佔的比值」，再利用此比值乘以題目問及的份數，問題一中她將 5 等分看成是$\frac{5}{5}\div 5=\frac{1}{5}$（見圖 4-1），也就是她先將整張紙看成是$\frac{5}{5}$張紙，之後再利用等分除方式除以 5 求出每等分是$\frac{1}{5}$張紙，利用「等分除」的方式，先求出每等分的所佔的比值，再求出其中的 2 份就是$\frac{2}{5}$；在問題二中，她同樣也是以這樣的方式解題（見圖 4-2），

先令 9 公分的巧克力是$\frac{9}{9}$分（條），利用等分除的方式，求出原來巧克力每份所佔的比值$\frac{1}{9}$，再求出吃掉的 4 公分就是$\frac{4}{9}$。

（二）指認「基準量」失敗，並有「單位」迷思

小亭的初始解題裡，有明顯的指認「基準量」失敗的情形，可以發現她延續她的「一份所佔的比值」策略，解以下需要重新尋找基準量的問題，但她卻視題目最先出現的數字爲基準量，因而解題失敗；同時，在解題表現裡她也有「比值有單位」的迷思出現。

原案二（931112、931231）

問題三：一籃蘋果有 10 顆，現在媽媽再買 5 顆放進去，那麼原來的蘋果數應該是現在的多少倍？

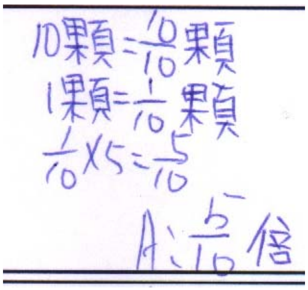


圖 4-3 問題三的初始解題

問題四：一塊披薩切成等份的 5 片，吃掉其中的 4 片，請問原來的披薩是吃掉部分的多少？

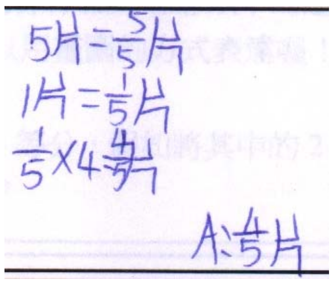


圖 4-4 問題四的初始解題

問題五：一條巧克力 7 公分長，妹妹吃了 3 公分，請問原來巧克力是妹妹吃掉的多少倍？

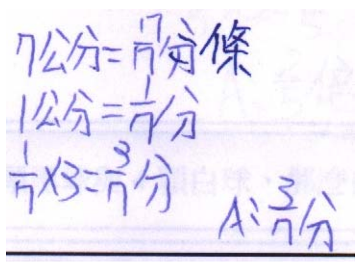


圖 4-5 問題五的初始解題

（問題三訪談）

0301 I：我們來看這一題，妳寫的$\frac{10}{10}$顆是什麼意思？

0302 S：全部的 10 顆

0303 I：那妳的$\frac{1}{10}$顆是指什麼？

0304 S：1 顆，ㄛ…，所以剛剛的應該是$\frac{10}{10}$籃才對！

0305 I：那妳的$\frac{5}{10}$指的是什麼？

0306 S：**因爲 1 顆是$\frac{1}{10}$籃，所以 5 顆就是$\frac{5}{10}$籃**

0307 I：**可是題目是問什麼呢？**

0308 S：原來蘋果是現在的多少倍？

0309 I：所以**現在應該是多少顆**才對？

0310 S：現在應該是 10＋5＝15 顆，原來是 10 顆…

0311 I：然後呢？

0312 S：**把原來的除以現在的，所以 10÷15＝$\frac{10}{15}$倍**

（問題五訪談）

0501 I：妳的$\frac{7}{7}$指的是什麼？

0502 S：$\frac{7}{7}$分（份）

0503 I：所以你認爲 1 公分就是$\frac{1}{7}$份？

0504 S：對！

0505 I：是誰的$\frac{1}{7}$？

0506 S：全部的$\frac{7}{7}$條巧克力（比著畫的圖，並將分改爲條）

0507 I：那全部應該是吃掉的多少？

0508 S：$\frac{3}{7}$

0509 I：妹妹吃掉多少？

0510 S：3 公分

0511 I：那原來是吃掉部份的多少？

0512 S： $7÷3=\frac{7}{3}$，$\frac{7}{3}$倍

分析二

在問題三的工作單（圖 4-3）與訪談裡，可以發現小亭同樣也是利用求出每份所佔的比值方式，先將原來全部的蘋果數看成是完整的 1（籃），算出其中的 1 顆蘋果就是$\frac{1}{10}$籃，再求出 5 顆就是$\frac{5}{10}$籃（行號 0306），雖然這樣的方式並沒有錯誤，但是她卻忽略了重要的解題關鍵，也就是此時的基準量應該是加入了 5 顆蘋果後的總數 15，而非原來的 10，因此當研究者問她現在的蘋果應該是多少顆時（行號 0309），她才恍然大悟說出現在是 15 顆，原來是 10 顆（行號 0310）。

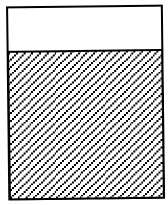
此外，她在問題四與問題五的答案中都出現了「比值有單位」的情形，但是由圖 4-4 與圖 4-5 的推斷，應該是她在利用等分除方式的計算過程中，不斷的將上階單位（分、片）寫出，以至於她的答案就延續計算過程所寫的而順勢寫下，在問題五的訪談中可以發現，當她以 7÷3 糾正她的答案後，她的比值並未出現單位（行號 0512）。爲了探討她是否因爲問題句子順序與語詞「倍」、「幾分之幾」與「多少」的影響，研究者在隔一段時間後的訪談中特別針對這樣的疑問加以訪談，結果從她的回答以及解題表現，發現她對於思考比值問題仍擺脫不了題目中詞語的束縛。

（三）對面積與體積的比值問題存有單位的迷思

在原案三的初始解題表現中可以發現，雖然小亭可以正確的找出基準量與比較量，但是她卻誤認爲只要是算面積與體積的問題都應該有單位。研究者爲了進一步探討這樣的現象，因此在相隔一個多月後再對小亭進行一次訪談，發現她仍然有這樣的迷思存在。

原案三（931112、931231）

問題六：如圖，已知一長方形的面積是 9 平方公分，切成一個 7 平方公分的正方形（斜線部分）與 2 平方公分的小長方形（空白部分），請問原來長方形是正方形的幾分之幾？



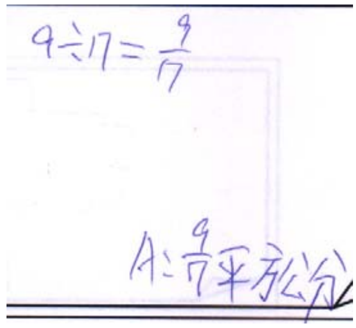
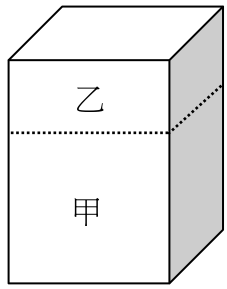


圖 4-6-1 問題六的初始解題

問題七：如圖，有一長方體，容積是 7 公升，現在將它分割成一個 5 公升與一個 2 公升容積的甲、乙兩長方體，請問甲長方體是原來長方體的多少？



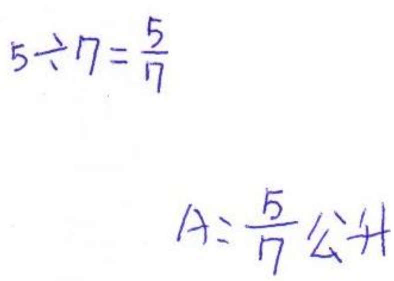


圖 4-7-1 問題七的初始解題

（問題六訪談）

0601 I：這一題的意思了解嗎？

0602 S：不知道

0603 I：好，那假如從圖來看，妳認爲誰是誰的幾倍？

0604 S：原來長方形是正方形的…

0605 I：最後答案是你寫的$\frac{9}{7}$平方公分？

0606 S：對，$\frac{9}{7}$平方公分

0607 I：**妳認爲會不會有單位？**

0608 S：…（搖頭）

0609 I：爲什麼？

0610 S：因爲題目是問原來的長方形是正方形的幾分之幾

0611 I：所以說全部會是這一塊正方形的…

0612 S：$\frac{9}{7}$倍

0613 I：那麼正方形是原來長方形的多少倍？

0614 S：$\frac{7}{9}$倍

分析三

在小亭的兩題關於面積與體積的工作單上表現，發現她雖能將題目所要問的比較量與基準量並置討論，並正確的找出兩者的相對位置，但是她卻寫出$\frac{9}{7}$平方公分與$\frac{5}{7}$公升的答案，可見她對這樣的比値問題存有單位的迷思。但是在問題六的訪談中，當研究者問小亭認爲$\frac{9}{7}$會不會有單位時（行號 0607），她又能很肯定的搖頭（行號 0608）表示沒有，並且回答題目是問原來的長方形是正方形的幾分之幾（行號 0610），而且隨後也能回答出正方形是原來長方形的$\frac{7}{9}$倍（行號 0614），可見此時她已能注意到比較量與基準量的關係，但是當她在初始解題時並未注意到這樣的關係不應有單位存在。但是在第二次的訪談中意外發現，小亭沿用如同原案一與二所使用的「一份所佔的比値」策略，沒有察覺何者爲基準量而指認失敗，因而問題六無法正確的解答成功（如圖 4-6-2），雖然她的工作單上並沒有寫出單位，但是在訪談中由於研究者提出她的問題七解答（如圖 4-7-2）讓她加以對照，因此她轉而認爲答案應該是$\frac{7}{9}$平方公分而非$\frac{7}{9}$倍，同時並明確的指出面積問題與體積問題應該是要有單位，所以才會認爲這樣的問題應該是附有單位，更加以確定她的「比値有單位」迷思是受面積與體積的典型問題所影響。

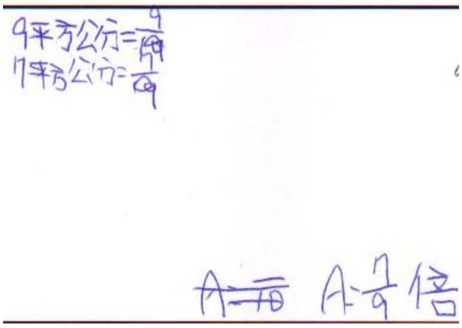


圖 4-6-2 問題六的再次解題

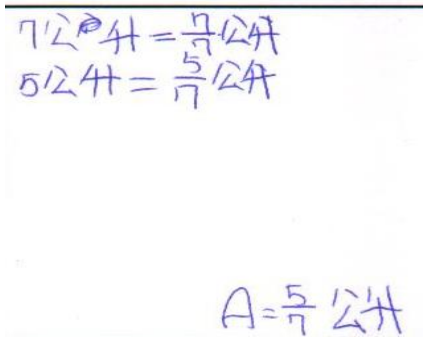


圖 4-7-2 問題七的再次解題

伍、結論與建議

從研究結果可以發現，小亭對於不同特性的比值構念問題會有不同的解題表現，研究者從研究結果做一結論與建議，並加以說明如下：

一、結論

研究者將研究結果中對小亭解題表現的發現加以綜合成下列數點以作爲結論，分別將之描述如下：

（一）將等號視爲是推理的結果而非等價關係

在小亭的工作單解題中，原本應該以「5 等分＝1 張 ⇒ 1 等分＝$\frac{1}{5}$張」表示，但她卻用「5 等分＝$\frac{5}{5}\div 5=\frac{1}{5}$」，這樣的現象也出現在國小低年級解應用問題的情境中，例如，小明原本有 3 元，媽媽又給他 4 元，後來他花掉了 5 元，請問您小明剩下多少錢？有些同學出現採用這樣的方式求解「3＋4－5 ＝ 3＋4 ＝ 7－5 ＝ 2」，答案雖然正確，但是等號「＝」兩端卻不相等；這樣的現象也出現在國中求未知數的問題上，例如，在解 $3x-2=0$，x=?的問題上，*有些學生出現*「$3x-2=0=3x=2=x=\frac{2}{3}$」，如此也是答案正確，等號「＝」兩端卻不相等的情形。上述將等號看成單向運算過程的「結果」，不是將等號視爲雙向的「等價關係」，此現象 Kieran 早在 1981 年的研究就已指出。

雖然這樣的推理情形只有在問題一（恰好是工作單問題的第一題）中出現，

但是在她的解題表現中也陸續發現「10 顆＝$\frac{10}{10}$顆、5 片＝$\frac{5}{5}$片、7 公分＝$\frac{7}{7}$分」，甚至在隔一個多月後的再次解題仍發現有「7 公升＝$\frac{7}{7}$公升」這樣等式左右項單位與單位量的矛盾存在，據此可見她對於等號關係代表等價類的認知仍是不夠完整的。

（二）利用「一份所佔的比值」求算比值，卻容易忽略基準量的指認

過去的研究發現，學生習慣以小數來表示兩數間的倍數關係（劉祥通，2004），但是小亭在工作單上的解題，幾乎都是利用先找出「一份所佔的比值」$\frac{1}{b}$方式以完成解題，例如$\frac{5}{5}\div 5=\frac{1}{5}$、$\frac{9}{9}\div 9=\frac{1}{9}$，來幫助她以分數$\frac{a}{b}$呈現比值。

雖然使用這樣的方式是如同求出 Vergnaud（1994）所說的兩度量空間下的量數 b（5）與 1（$\frac{5}{5}$）間的反函數係數$\frac{1}{b}$（$\frac{1}{5}$），再加以利用此數來乘以已知的量數 d（2）而求出比值$\frac{d}{b}$（$\frac{2}{5}$），對學童來說是較難的思考方式（Vergnaud, 1983），但是小亭卻能以類似使用等分除的方式克服而完成解題，可見她的思考方式有其特殊性；但是，從另一方面來看，她在原案一與二都使用此法而沒有指認出基準量，因此產生了她在某些題目上無法成功地解題。Thompson（1994）及 Kaput 與 Maxwell-West（1994）指出學童對於內化的比值（internalized ratio）概念有困難，也就是學童無法將這內化的比值加以應用，但是本研究中的小亭在尚未接受過比值教學的刺激下，已能自行發展出「一份中所佔的比值」，進而將之利用來求比較量與基準量間的比值問題，雖未臻成熟，但若她能正確的指認出基準量，並能充分利用找出的基準量來求出此「單位比值」，則不管問題中的比較量爲何數，她都可以利用此方式找出最終的比值，也就是視此單位比值爲一固定的「內化的比值」來看待，並加以應用。

（三）存在「比值有單位」迷思

在原案二中的問題四、五與原案三的問題六、七中，小亭皆出現「比值有單位」的迷思，但經研究者進一步訪談後發現她受句末詞語的影響並不大。由於從

她在問題四與五的解題表現，可以很明顯的發現是因爲她習慣以類似等分除的商方式（求出一份中所佔的比值）解題而寫出單位，因而造成她的工作單表現出現比值有單位，同時在最後的答案上她也沒有加以回顧思考合理性；而問題六與七部份，她的初始表現是有單位迷思，但是隨後經提問後又能說比值是沒有單位，雖然探討學生建構數學知識必定涉及到教學（Cobb, & Steffe, 1983），但是研究者爲了避免訪談過程中的教學成分太重而影響小亭的解題表現，因此在隔一個多月後再以原題目訪談她，發現她對於有關面積與體積的比值問題仍然無法完全跳脫「比值有單位」的迷思，可見她對於「比值不應具有單位」仍不是很熟悉。這樣的情形與劉祥通（2004）的研究中發現五年級學生小灝的比值構念出現「單位」類似，小灝在被糾正關於「比值有單位」－「7 公升是 9 公升的$\frac{7}{9}$公升」的迷思後，在後續的檢驗題仍然出現「8 公尺是原來 11 公尺的$\frac{8}{11}$公尺」這樣的答案。

（四）確定基準量與比較量後，改以除法方式求出比值

在問題三跟問題五中，小亭的初始解題原本都是利用單位分數求解，因而錯誤解題，但是當在問題三與問題五的訪談中，研究者進一步用「原來是多少、現在是多少」以及「原來是吃掉的多少」等問語引導她，發現她能夠因此發現自己誤用單位分數而忽視基準量，因而在確定基準量後改採「÷」的方式解決，或許因爲在她發現單位分數策略比較不容易解決這類基準量不明顯的問題，因此轉而思考別的方式，以被除數與除數的方式思考，當她確定比較量與基準量時，比較容易連結到除法中的被除數與除數的位置而解題成功，而這樣的方式就是利用除法中的包含除找倍數方式（Vergnaud, 1994），也就是 Vergnaud 認爲對學童而言較爲普遍易懂的方式。

二、建議

從研究結果中可以發現，小亭善用「一份所佔的比值」幫助解題，但對於等號關係式與指認基準量有困難，因此本研究針對這樣的情形提出建議，並分別敘述如下：

（一）藉由提問幫助學生延伸其概念的理解

小亭在其解法用到大量的「一份中所佔的比值」方式解題，並加以利用此數來「乘以」題目中的所佔份數，這樣的方式，也就是視此數爲可重復複製的單位（repeatable unit）（Steffe, & Cobb, 1988；甯自強，1992），但是她只知道「怎麼使用」這一比值，卻沒有加以思考「如何選擇」一數來加以求出此數「其中一份所佔的比值」。訪談過程中，研究者曾藉由提問「現在是多少？」、「原來是多少？」幫助小亭確認比較量與基準量的關係，而使她改變策略解題成功，但在小亭能指認出基準量後，若是能再加以提問，請她以原本找「一份中所佔的比值」方式求解，相信對她使用此比值會有更大的幫助。

（二）讓學生學習如何標示出單位

學生對於自己所寫的算式通常很少有回頭思考其合理性的習慣，因此往往解題表現總是看似對，卻又缺少了某些東西，就如小亭在等號的連結上出現了以思考過程爲依據而非以等價關係爲依據，因此她寫下「10 顆＝$\frac{10}{10}$顆、5 片＝$\frac{5}{5}$片、7 公分＝$\frac{7}{7}$分」這樣的計算過程，雖然這樣的過程並不影響她接下來的「一份所佔的比值」，但是這樣的過程很顯然是不合理的等式，左右式的單位並不相同，但是她卻未察覺。假使她能夠對所寫的算式加以標示出單位，也就是「1 籃的 10 顆＝$\frac{10}{10}$籃，1 塊的 5 片＝$\frac{5}{5}$塊、1 條的 7 公分＝$\frac{7}{7}$條」，相信她應該能夠很快地反思到自己原本答案的不合理性，而不至於有這樣的錯誤，因此讓學生學習如何標示出單位應該是改善學生解題中相當重要的一環。

（三）探討閱讀理解問題的能力是可繼續研究的題材

在小亭解問題三、四、五時，因錯誤地指認基準量，以致於解題失敗。經研究者追問「原來有多少？」、「現在有多少？」等問題後，她才發現了「誰是基準量？」與「誰是比較量？」，進而得以正確解題。由此可見，她對問題的理解有困難，使得求比值問題時出現錯誤，但是當能正確的解讀問題後，她即能成功的解題，因此研究者認爲閱讀理解能力應該是影響學生解題的一個重要因素，可

供後續研究繼續探討。

參考文獻

黃瑞琴（2002）：**質的教育研究法（二版七刷）**。台北：心理出版社。

甯自強（1992）：經濟計數的活動～高階單位『十』的首度引入～。**教師之友，33（5）**，47-51。

甯自強（1998）：涂景瀚的數概念。**科學教育學刊，6（3）**，255-269。

劉祥通（2004）：**分數與比例問題解題分析—從數學提問教學的觀點**。台北：師大書苑。

Skemp, R. R.（1987）/陳澤民譯（1995）：**數學學習心理學**（六版一刷）。台北：九章。

Yin,（1994）/尚榮安譯（2001）：**個案研究**。台北：弘智。

Cobb, P., & Steffe, L. P. (1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*(2), 83-94.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985).The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics and Education, 16*(1), 3-17.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical strictures.* Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Co.

Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews, in mathematics education research. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp.517-545). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Graeber, A. O. (1993). Misconception about multiplication and division. *Arithmetic Teacher, 40*, 408-411.

Hart, K. M. (1981). Fractions. In K. M. Hart, D. Kerslake, M. L. Brown, G. Ruddock, D.E. Kuchemann, & M. McCartney (Eds.), *Children understanding of mathematics: 11-16*. Oxford, London: Northampton.

Kaput, J., & Maxwell West, M. (1994). Missing-value proportional reasoning problems: factors affecting informal reasoning patterns. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 41-59). Albany, NY: SUNY Press.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 317-326.

Lamon, S. J. (1994). Ratio and proportion: cognitive foundations in unitizing and norming. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 41-59). Albany, NY: SUNY Press.

Lamon, S. J. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding essential content knowledge and instructional strategies for teacher.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Steffe, L. P., & Cobb, P. (1988). *Construction of arithmetical meanings and strategies*. NY: Springer-Verlag.

Thompson, P (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 41-59). Albany, NY: SUNY Press.

Vergnaud, G. (1983).Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). NY: Academic Press.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why? In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 41-59). Albany, NY: SUNY Press.

Vergnaud, G. (1996). The theory of conceptual fields. In P. Cobb, G. A. Goldin, B. Greer, P. Nesher, & L. P. Steff, (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 219-239). NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

A Fifth Grader's Performance on Solving Ratio Problems

Yu-Ping Chang   Shiang-Tung Liu

The Graduate Institute of Math Education, National Chiayi University

Abstract

The purpose of this study is to explore a fifth grader's performance of solving ratio problems. The study was a case study. The task-based interview was adopted in the process of data collection. There were 7 questions of the task, and 3 protocols that derived from the similar performance of the results.

The improtant findings of the study are as follows. First, she couldn't view both numbers between equal mark, "=", having an equivalent relationship. In addition, she first used the strategy of finding "the quantity of unit fraction" and used the result of "the quantity of unit fraction" to get the answer of ratio problems. Consequently, the form of his answer is a rational number rather a decimal number.

Key words: case study, ratio, rational number, task-based interview