一位四年級學生的分數運算子解題表現

施瀚皓[1] 劉祥通[2]

[1]彰化縣立和美國民中學
[2]國立嘉義大學數學教育研究所

（投稿日期：94 年 2 月 3 日；修正日期：94 年 3 月 7 日、94 年 4 月 13 日；接受日期：94 年 5 月 9 日）

摘要

本研究旨在探討一位國小四年級學生在分數運算子構念問題上的解題表現。研究方法爲個案研究，並利用工作單爲基礎的訪談技巧蒐集資料；也就是先以工作單的問題爲基礎，再依據工作單上的解題表現進行訪談。其重要發現如下：(1)小明利用先等分後複製爲解題基本策略。(2)當運算子是帶分數型態時，小明能利用乘法分配律解題。(3)小明已達到將分數視爲擬倍數的階段。(4)被乘數不能被等分除盡時，小明無法將被乘數等分後的量當作新單位進行解題。

關鍵字：分數、構念、運算子、個案研究

通訊作者：劉祥通 liust@mail.ncyu.edu.tw 05-226-3411 ext 1922

壹、緒論

分數概念在 Kieren(1976)率先提出分數的子構念(subconstruct)作爲有理數學習發展的支架(backbone)之後，後續的研究(Ohlsson, 1988；Behr, Harel, Post & Lesh, 1993)亦延續此觀點對分數的學習與教學進行分析與建議。Kieren(1993)主張教學者必須掌握各個子構念不同的意義，並以此爲基礎設計出相關的分數問題，以便幫助學生建立完整的分數概念。Behr 等人(1993) 的研究延續 Kieren 的子構念，主張將分數概念分爲部份－整體(part-whole)、測度(measure)、比值(ratio)、商(quotient)、與運算子(operator)五個子構念。

部份－整體關係也就是某個部份量相對於整體劃分成等分單位時的比較關係(Behr, Lesh, Post & Silver, 1983)。例如$\frac{2}{3}$可以是 3 等份之中的 2 份與整體的 3 份並置，構成$\frac{2}{3}$這個分數。將分數視爲**商**也就是將分數$\frac{b}{a}$視爲是 b 除以 a。例如：將 3 塊蛋糕平分給 4 個人，每個人可分到$\frac{3}{4}$塊蛋糕。**測度構念**的涵意即分數在數線上有一席之地，且分數可以作爲一個量、一個數或是指某個東西有多少。**比值**則表示兩個量的相對關係，亦可說比值是「比較的指標」而不僅是「數」(comparative index rather than number)(Behr et al., 1983)。例如教室中男生 15 人，女生 20 人，則男生人數是女生的$\frac{3}{4}$。此時$\frac{3}{4}$像是相對的指標而不僅是數。

分數視爲**運算子**則是將分數視爲一種指定運算，也可說是一個轉換器(transformer)(Lamon, 1999)。某個量數經由這個轉換器之後，依循一定的規則，得到另一個量數。例如：16 顆糖果的$\frac{3}{4}$是 12 顆，可以看成 16 顆糖果經由轉換器$\frac{3}{4}$後產生 12 顆糖果。此時的$\frac{3}{4}$便有著函數(function)的意味(Behr et al., 1993)；也就是某數、某個集合或某塊區域經分數作用後，映射到(map onto)另一數、另一個集合或另一塊區域。

由於運算子構念運用了部份的代數性質，例如乘法反元素與單位元素，以及

變換(transformation)的觀念 (Kieren, 1993)，也是將來學生學習函數合成觀念的具體範例。劉祥通(2004)認爲運算子構念要將分數當成一個數，又要將另一個分數當成一個指定運算過程，對分數需要有較深刻的理解，這也就是爲何運算子在所有分數子構念中也是位階較高－也就是相對較難的。運算子構念與看待分數乘數(multiplier)爲單一或合成的形式相關，鑑於運算子構念是分數乘除法的教學基礎(Lamon, 1999)，本研究便以運算子構念爲主題，探討個案學生在運算子構念上的解題表現。

貳、文獻探討

以下將分成**分數的運算子構念**以及**分數乘法的概念發展**二個部份作相關文獻的回顧：

一、分數的子構念之一：分數視爲運算子(operator)

分數運算子的構念意指將分數視爲是函數(function)(Behr et al., 1993)，是一種變換(transformation)(Behr et al., 1983)；也可說是一個轉換器(transformer)(Lamon, 1999)。相似的情形包括線段的伸縮、離散量集合個數的增減、相似形面積的縮放等等。

以$\frac{2}{3}$爲例，可將乘與除分開視爲兩個步驟；但也可以看成是一個單一的運算。也就是說，Q 的$\frac{2}{3}$倍可以視爲是某個量 Q$\times\frac{2}{3}$的單一運算，也可以視爲運算的合成：Q 先除以 3 後乘以 2 或先乘以 2 後除 3。以算式表示爲 Q$\times\frac{2}{3}=2(\frac{Q}{3})=\frac{2(Q)}{3}$。而這個過程的結果有可能較原來的量大，亦有可能小，端賴此運算子是大於 1 或小於 1。

Lamon(1999)認爲學生能理解分數當作運算子時：

(一)能以不同的角度解釋分數乘數(multiplier)。例如能將乘數$\frac{3}{4}$視爲 3($\frac{1}{4}$單位)或是$\frac{1}{4}$(3 倍單位)。配合實例來說，8 公分原本是 8 個 1 公分，$\times\frac{3}{4}$可看作是原

來的單位 1 公分縮成$\frac{1}{4}$公分再伸長 3 倍；因此經乘數$\frac{3}{4}$作用後，8×3($\frac{1}{4}$公分)＝8×($\frac{1}{4}$公分)×3＝2 公分×3＝6 公分；同理也可看作是原單位 1 公分伸長 3 倍再縮$\frac{1}{4}$，結果就是 8×(3 公分) ×$\frac{1}{4}$＝24 公分×$\frac{1}{4}$＝6 公分。

(二)學生能以單一分數描述兩個運算(乘與除)的合成。例如將某單位×3 再除以 4；或是某單位÷4 後再乘 3，兩項皆等於×$\frac{3}{4}$單位。

(三)學生能確認經運算子轉換後的結果，並能說出輸入與輸出之間的規則。例如一個運算子的規則是 9 換 15，則輸入 9，輸出 15，記為$\frac{15}{9}$。此時輸出＝$\frac{15}{9}$×輸入。

(四)學生能用模型確認以單一分數表示兩個分數合成的情形。例如$\frac{2}{3}$($\frac{3}{4}$單位)＝$\frac{1}{2}$單位。

由語意(semantic)的角度來看，運算子構念對分子與分母主要有以下兩種解讀(Behr, Harel, Post & Lesh, 1992；Behr et al., 1993)：

(一)複製器(duplicator)與等分-化約器(partition-reducer)(簡稱 DPR)

將分子視為複製器、分母視為等分-化約器似乎是最基本也最貼近於操作具體物時的概念。也就是分數運算子轉換了原來運算元的單位數(number of units)。轉換原單位數包含了複製(duplicate)單位以增加單位數以及等分(partition)運算元而化約(reduce)單位數。

例如 20 公分的$\frac{3}{4}$，以複製器與等分-化約器的觀點，可以看作 20 公分先*等分*成 4 群，再*化約*成 1 等分後*複製* 3 倍。運算上是(20 公分)×$\frac{3}{4}$＝(4×5 公分)×$\frac{3}{4}$＝(5 公分)×3＝15 公分。

(二)伸展器(stretcher)與收縮器(shrinker) (簡稱 SS)

將分子視爲伸展器、分母視爲收縮器，也就是將運算元的原**單位**大小(size of units)作變換。不同於 DPR 變換了原來運算元的**單位數**，SS 乃針對原單位作伸縮，因而產生了運算元測量單位(measure of units)的轉換。

例如 20 公分的$\frac{3}{4}$可以看作是 5 個 4 公分，先將每個 4 公分*收縮*成 1 公分，再將每個 1 公分*伸長*至 3 公分。也就是(20 公分)$\times\frac{3}{4}$＝(5×4 公分)$\times\frac{3}{4}$＝5×(1 公分)×3＝5×(3 公分)＝15 公分。

Behr、Khoury、Harel、Post & Lesh(1997)的研究中指出 SS 子構念必須能將分數視爲是內涵量(intensive quantity)或是比率(rate)的概念.。例如「某材質鐵棒，長 13 公分重 7 公斤；現有鐵棒長 9 公分則重多少？」則乙鐵棒重爲 9(公分)$\times\frac{7}{13}$(公斤/公分)，此時則視$\frac{7}{13}$爲一比率(內涵量)。

然而 DPR 與 SS 這兩種看法牽涉到不同的認知結構，以及對於問題情境的考量。DPR 需具備等分量的技巧並理解等分除；而 SS 雖亦需等分的技巧，尚需具備測度(measure)以及包含除的概念(Behr et al., 1993)。

Behr 等人(1997)強調 DPR 子構念是操作最外層(outermost)的單位數；相對的 SS 子構念則是針對原來的單位，甚至需運思更內層的集聚單位。因此 SS 策略需能認知到全部的$\frac{3}{4}$是所有子集的$\frac{3}{4}$加總；使用此策略者需要較高的認知發展。

Behr 等人(1997)利用 8 捆火柴棒取其$\frac{3}{4}$的方式檢驗職前教師對分數運算子的操作，確立了 DPR 與 SS 子構念的存在；且使用 DPR 策略較 SS 策略常見。這個研究結果顯示已熟習分數概念的成人對於分數運算子的運思方式確實含有 DPR 及 SS 成份；但亦主張對於運算子以外的其他分數構念具有深刻理解後，才易出現 SS 策略的解題方式。

二、分數乘法運算概念發展

Armstrong 與 Bezuk(1995)認為在學習加法與減法時，學童容易用具體物賦予算式的意義。例如 5+2＝7，學童可用「我有 5 顆糖，媽媽再給我 2 顆糖，那我會有幾顆糖？」將算式具體化。相對的在乘除運算上比較困難。例如 2×5＝10，假設每組人數有 2 人，共有 5 組，此時 2 和 5 代表不同的意義(人和組)。在整數乘法運算中，學生需理解兩個數彼此之間的關係及意義，才能將算式逐漸抽象化。

分數乘法方面，Kieren(1993)認為分數的乘法是獨立於加法之外的(independent of additions)，無法以連加解釋；而且最好能將其中的數字視為乘法運算子的合成函數。而 Armstrong 與 Bezuk (1995)認為學生需要從等分(partition)經驗中獲得等分與整體的關係以及大小的倍數關係，逐漸將概念符號化。例如藉由折紙活動先對折再對折所得到的大小為原來的$\frac{1}{4}$，而逐漸轉化成符號形式的$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$。Boulet(1998)指出分數本身涉及了除法的概念，因此分數的乘法在本質上亦包含了除法的操作。例如 $3\times\frac{1}{2}$，可視為 3 個 1 各作平分的動作，再計算其量為$\frac{3}{2}$；亦可看作是長度 3 的一半是$\frac{3}{2}$。而分數乘分數則更為複雜；Boulet 舉例$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$的運算，是先把 1 單位分成 3 等份，以取得$\frac{1}{3}$，再將$\frac{1}{3}$作 2 等份，其中的一等份便是全部的$\frac{1}{6}$。由此亦可看出運算子構念由於必須同時處理除與乘的動作，對學生的認知來說是負荷相對較重的。

Harel(1995)將乘數角色在乘法概念的發展視為乘法概念域(multiplicative conceptual field)中的一個子結構－乘法概念子域(subfield)，而且涵蓋了三個階段：第一階段是正整數乘法，也就是能將正整數當乘數使用。例如 5 人每人各得 7 顆糖果，共得 5×7 而非 5 連加 7 次。第二階段將分數視為是擬乘數(pseudo multiplier)。例如 185 的$\frac{4}{7}$，先利用 185÷7 找出$\frac{1}{7}$的值，再×4 找出 185 的$\frac{4}{7}$；而 185 的 2.7 倍則是用 2×185＋(185÷10)×7 處理。此時，等分除與包含除的概念將影響解題策略。第三階段是將分數視為倍數(fraction as multiplier)階段，也就是能

將小數、分數視爲如同整數一般的乘數，並查覺到同一情境的運算保留情形。例如能將 100×$\frac{2}{5}$直接視爲是 100 內部的每一單位皆 5 換 2 的情境，概念上不需操作先等分再複製或是先縮後伸的過程。Harel 主張乘法理解的發展依此三階段發展進行。而只有在第三階段才具備運算保留能力。

参、研究方法

本研究採用個案研究(case study)的方式，探討一位國小四年級學生對運算子問題的解題表現。以工作單爲基礎的訪談（task-based interview）（Goldin, 2000）進行資料蒐集。有別於傳統半結構式訪談法事先已擬定訪談導引；本研究是先以工作單問題讓個案學生進行解題工作，研究者再針對其解題表現與想法，作爲訪談依據，運用訪談探討學生在分數運算子構念上的解題表現。以下將分別從研究對象、研究者立場、工作單與資料分析四個部分討論：

一、研究對象

爲了觀察學生對分數運算子問題的自發性解法與思考過程，本研究採用立意抽樣（purposeful sampling）的方式，選擇一位未接受過分數運算子教學的學生作爲本研究的研究對象。參與本研究的個案一小明是一位國小四年級的男性學生，就讀嘉義市某國民小學。小明在班級上表現屬程度高的學生，在數學表現較一般學生優異；此外亦能以口語清楚表達想法。在參與研究之前，小明並未接受過分數乘除法運算教學。

二、研究者立場

研究者本身爲研究工具(researcher as instrument)(Guba & Lincoln, 1981)，在本研究中，研究者的角色爲訪談者與觀察者；不僅是資料的蒐集者，也是資料分析的中心。在研究進行過程中，一方面觀察其解題過程，一方面根據其自發性解法詢問其理由或解釋，使學生能盡力表達自己的想法。當個案解題正確，研究者將根據其自發性解法詢問理由與想法，使個案能整理思緒並溝通表達；而個案解題

出現問題時，研究者便會試圖介入，提出問題、舉例或以其他表徵試圖激發個案的思考，以作爲運算子子構念發展上的依據。

研究者在訪談過程中，不以個案學生能否正確獲得答案爲滿足，而是以觀察學生的自發性解題爲目的。研究者並追問學生解題想法，期使學生的算式能有適當的陳述或表徵支持，以避免學生只是單純利用運算拼湊得到答案。

Cobb 與 Steffe(1983)認爲研究者即模型的建造者(researcher as model builder)。研究者以先前閱讀文獻或經驗所建立的模型爲參考基準，在研究進行過程中，依據研究發現，驗證或修正研究者所認知小明的分數概念模型。

三、工作單

本研究的工作單共有 12 個問題，在編製工作單時，先行參考國內外相關文獻，依據被乘數(multiplicand)與乘數(multiplier)的分數形態設計工作單：被乘數依照現行教科書編排的順序共有四個型態：整數、單位分數、真分數(分子不爲 1)以及帶分數；而乘數則分爲單位分數、真分數(分子不爲 1)以及帶分數三種型態，如此便形成 4×3 共 12 個題目，工作單中每個型態以一題爲代表。若從現行教科書的編排來看，分數的整數倍在五下即已習得(包括真分數、帶分數、假分數的整數倍；南一版，2003)；而六上則是學習小數乘小數以及分數除以整數的問題(南一版，2003)。分數與分數的乘除則安排在國民中學第一冊(南一版，2003)。而運算子構念與分數視爲乘數的思考有關，因此在順序上便由整數乘以單位分數而起；帶分數乘以帶分數爲止。

四、資料分析

個案研究是採用各種方法蒐集有效的完整資料，對單一的個人或社會單位作縝密而深入的研究(郭生玉，2002)。在資料的蒐集上，本研究資料主要來源爲工作單的解題表現與訪談的內容；此外學生解題時，除了利用觀察、記錄與分析以解釋複雜的行爲外，尚包括口語、畫圖、操作等各種不同的資料都可作爲描述個案概念的工具。

爲了增進資料詮釋的信度，本研究將利用重複情節(episode)的方式(甯自強，

1998)，也就是以情境與數據不同但結構類似的問題，檢核個案對相同概念訪談的一致性，可對照解題前後的策略是否相似。在效度上則採用三角校正法(triangulate)－分析不同的資料來源，檢視發現是否一致，避免資料詮釋流於偏見，藉以增進資料分析的效度(Creswell，2003)。

訪談的內容經錄音後，進行轉錄、編碼、歸類等階段。最後將轉錄的資料進行原案分析與歸納。在轉錄過程中，研究者將刪除與主題無關的對話、並適當修飾用字及內容，以便於閱讀。編碼型態上，以學生的解題策略為主題進行編碼(strategy code)；也就是對人們完成事情的方法、方式及技巧作出編碼(黃瑞琴，1991)。研究者基於前述文獻理論，對學生解題的方式、技巧及表徵進行編碼分類的工作。分析結束之後，為了類型化其解題表現，將他能解答的類似問題並置呈現，並將問題順序重新編排，如此亦可增進閱讀的便利。在原案中的題號(問題 1、2 …)，並非完全依照最初工作單所編排的題號，而是依原案呈現順序重新安排。同時限於篇幅，且為了避免訪談內容的重複性過高，因此僅挑選具代表性的訪談內容。原案的行號前兩碼為原案編號；後兩碼為原案轉錄資料編號。例如行號 0123 為原案 1 的第 23 行。訪談日期則以 6 碼表示，並附在該原案中。例如940103 即為民國 94 年 1 月 3 日。

肆、研究結果

研究者將小明在工作單的解題中，將具有共同表現特徵的題目合併在同一原案討論：

一、小明運用等分解 $\boldsymbol{a\times\frac{c}{b}}$(***a,b,c*** 皆為整數)，且 ***a*** 能被 ***b*** 除盡類型的問題。

原案一(940103)

問題 1、一瓶水 4 公升，小儀喝掉了$\frac{1}{4}$，則小儀喝掉多少公升？

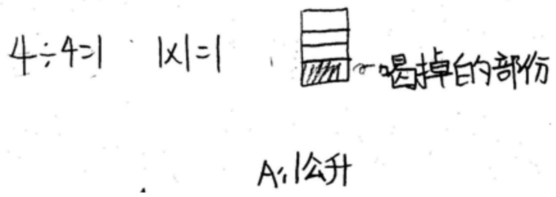

圖 4-1　小明的問題 1 解法

問題 2、1 條口香糖共有 15 片，小蕙請同學吃了$\frac{4}{5}$，則小蕙共請同學吃了幾片？

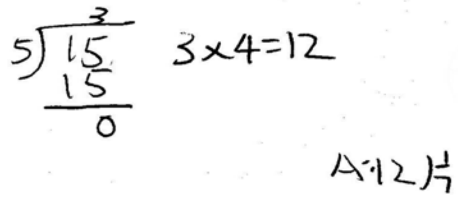

圖 4-2　小明的問題 2 解法

(問題 2 訪談)

0101I：左邊的直式是什麼意思？

0102S：15 片先分成 5 等份，所以 15÷5，每等份 3 片

0103I：爲什麼要除以 5

0104S：因爲是$\frac{4}{5}$，所以要除以 5

0105I：爲什麼是 3×4？

0106S：因爲每等份 3 片要拿 4 份，所以是 3×4

0107I：整個算式的意思是什麼呢？

0108S：先把 15 片分成 5 個部份；因爲是$\frac{4}{5}$，所以再拿 4 個部份

問題 3、已知木柵動物園中一隻公無尾熊體重爲母無尾熊的 $1\frac{2}{5}$倍；若母無尾熊重 6 公斤，則公無尾熊多重？

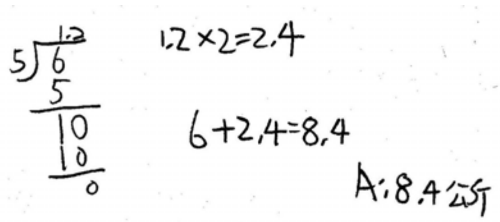

圖 4-3　小明的問題 3 解法

(問題 3 訪談)

0109I：可以解釋一下你的想法嗎？

0110S：因爲 6x1＝6，因此先分開看；6 除以 5＝1.2，然後再x2 得到 2.4，最後再加上原來的 6 得到 8.4 公斤。

分析一

在原案一的三個問題中，被乘數皆爲整數，而乘數分別是單位分數，非單位分數以及帶分數。觀察小明的解題過程，可以發現小明能夠將分數運算子視爲是先除以分母後乘以分子的計算過程(行號 0108、0110)。在原案一，小明能將分數運算子視爲是先等分被乘數再複製的過程，也就是採用 Behr 等人(1992、1993)所提到的 DPR 策略的先等分後複製，順利解決了被乘數爲整數的運算子問題。

二、小明能利用等分割法解決單位分數乘以真分數的問題

原案二(940103)

問題 4、小萍買蛋糕準備慶祝母親節；她自己吃了$\frac{1}{2}$，而她姐姐則是吃了小萍的$\frac{1}{3}$，請問姐姐吃了全部蛋糕的幾分之幾？

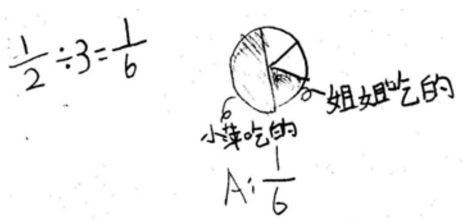

圖 4-4　小明的問題 4 解法

(問題 4 訪談)

0201I：小萍吃了原來的多少？

0202S：$\frac{1}{2}$

0203I：那他姐姐吃了全部的多少？

0204S：$\frac{1}{6}$

0205I：你怎麼知道的？

0206S：因爲$\frac{1}{3}$就是 3 等份，所以是÷3

0207I：你怎麼知道$\frac{1}{2}\div 3=\frac{1}{6}$？學校有教嗎？

0208S：(學校)沒有(教)，因爲這一半(指右半邊)除以 3，所以是$\frac{1}{6}$

問題 5、一隻大象每日的食量爲$\frac{1}{3}$公噸，而一隻小象每日的食量爲大象的$\frac{3}{5}$，則小象每日的食量爲多少？

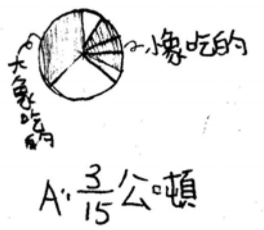

圖 4-5　小明的問題 5 解法

(問題 5 訪談)

0209I：請解釋一下你的圖的含意

0210S：大象吃了(指著左邊那一塊)$\frac{1}{3}$公噸，小象吃了大象的$\frac{3}{5}$，所以吃了$\frac{3}{15}$

0211I：爲什麼要將右邊那個部份分成 5 等分？

0212S：因爲(小象)吃了大象的$\frac{3}{5}$，所以分成 5 等份

0213I：然後呢？

0214S：然後再算 3 等份

0215I：那一小份是多少(指著其中的一小塊)？

0216S：$\frac{1}{15}$吧

分析二

問題 4 與問題 5 的題目的被乘數同時爲單位分數，而乘數分別爲單位分數與

非單位分數。在原案二中可清楚見到小明以÷**3** 來計算某數$\frac{1}{3}$的值。可見小明已能將小明某數的$\frac{1}{3}$視爲÷3 的運算過程。小明雖未學過分數除以整數的算則，但是可以利用等分割法，配合圖形，明確指出$\frac{1}{2}$的$\frac{1}{3}$是$\frac{1}{6}$(行號 0208)。小明在問題 5 的表現上，則完全依賴圖形上的等分割來幫助作答。小明除了能再次利用先等分後複製的策略外(行號 0212、0214)，更能順利指認等分後的單位量(行號 0216)，並利用等分後的單位量清楚指出答案爲$\frac{3}{15}$公噸。值得一提的，被乘數$\frac{1}{3}$比起乘數$\frac{3}{5}$還小，而小明仍可以根據題意，針對$\frac{1}{3}$進行分割，透過單位量轉換(將原單位$\frac{1}{3}$轉換成$\frac{1}{15}$)，進而分出$\frac{1}{3}$的$\frac{3}{5}$，得到$\frac{3}{15}$。

三、小明將高階單位的被乘數分數換算成低階單位的整數，再以等分割解決運算子爲單位分數的問題。

原案三(940103)

問題 6、若 1 條繩子長$\frac{3}{4}$公尺，用去$\frac{1}{3}$，則用去多少公尺？

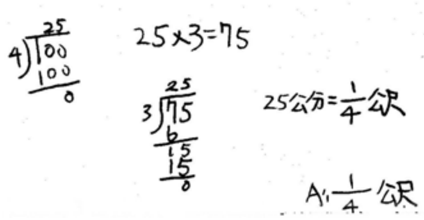

圖 4-6　小明的問題 6 解法

(問題 6 訪談)

0301I：請你解釋一下算式的意思。

0302S：因爲 1 公尺是 100 公分，所以先除以 4，100÷4＝25，然後再乘以 3＝75

0303I：爲什麼要先除以 4 呢？

0304S：先除以分母的 4

0305I：那乘以 3 是什麼意思？

0306S：除完後再乘以分母的 3

0307I：那算出來的 75 是什麼？

0308S：75 公分，就是$\frac{3}{4}$公尺

0309I：然後呢？

0310S：然後再除以 3 得到 25 公分，25 公分就是$\frac{1}{4}$公尺

0311I：爲什麼要除以 3 呢？

0312S：因爲算$\frac{1}{3}$就是除以 3

問題 7、由甲地到乙地走路需 $2\frac{3}{4}$小時，若騎腳踏車只需走路時間的$\frac{1}{5}$，則騎腳踏車要花多久時間？

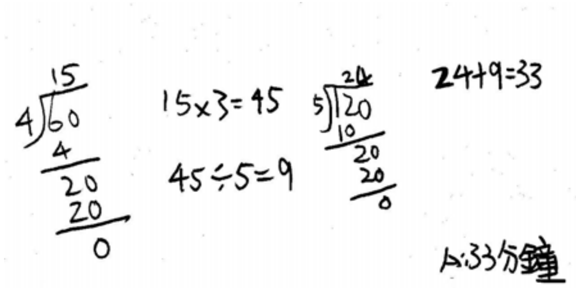

圖 4-7　小明的問題 7 解法

(問題 7 訪談)

0313I：請你解釋一下算式的意思。

0314S：因爲 1 小時是 60 分，60÷4＝15，然後再x3＝45

0315I：你剛才說的這部份是在算什麼呢？

0316S：算$\frac{3}{4}$小時有幾分

0317I：接下來呢？

0318S：45÷5＝9，所以說 45 分鐘的$\frac{1}{5}$是 9 分鐘

0319I：那右邊的算式是什麼意思？

0320S：2 小時是 120 分，除以 5 等於 24 分

0321I：然後呢？

0322S：然後 24+9=33 分鐘，就是答案

分析三

原案三題目的乘數皆爲單位分數，而被乘數則分別爲非單位分數以及帶分數。在二個問題的解題過程中，可以清楚的發現小明能將「單位分數運算子」的角色視爲「除以單位分數的分母」或是「等分成分母的數目」的過程(行號 0310、0318、0320)。

特別在問題 6 與問題 7，被乘數的單位分別爲「公尺」與「小時」，小明先將被乘數的單位轉換成較小的「公分」與「分鐘」，將分數被乘數化成較小單位的整數後，再對分數運算子計算；再利用所得的整數結果再次化成分數(行號 0310)，或是直接用較小單位作答(行號 0322)。並未出現如研究者預測一般，利用$\frac{3}{4}$是$\frac{1}{4}$的 3 倍幫助解題。也就是說小明利用了單位換算，迴避了分數乘分數的形態，轉換成整數乘分數幫助解題。

四、當運算子是帶分數時，小明能利用分配律並配合等分割法解決問題

原案四(940103)

問題 8、若一瓶鮮乳的容量是 2 公升，而統一公司爲回饋顧客，將新瓶的容量改爲原來的 $1\frac{3}{4}$，則新容量爲多少公升？

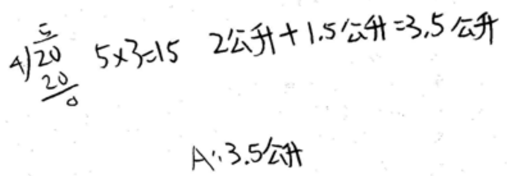

圖 4-8　小明的問題 8 解法

(問題 8 訪談)

0401I：可以解釋一下你算式的意思嗎？

0402S：2 公升是 20 分公升，20 分公升先除以 4 得到 5，然後 5 再乘以 3 得到 15，最後再把原來的 2 公升加上去就好了。

0403I：你算出來是 15，爲什麼加的時候是 1.5？

0404S：15 是分公升，變成公升就是 1.5

分析四

與之前的問題作比較：在原案一問題 3 的情境中，小明將 6 的 $1\frac{2}{5}$倍視爲 6 $\times$1 再加上 6$\times$2÷5 的結果，此時運算子 $1\frac{2}{5}$是帶分數；而在本原案問題 8，類似問題 3 運算子爲帶分數的情境中，小明亦能展現出使用分配律計算的能力(行號 0402)，而不是運用成人較熟悉的帶分數先化成假分數再相乘的算則。

值得一提的，原案三問題 7，小明面對被乘數爲帶分數的問題，運算子爲單位分數時，亦能運用類似分配律 $2\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}=2\times\frac{1}{5}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}$的想法處理。

此外，問題 8 的被乘數是整數，但小明仍利用原案三的策略，選擇將 2 公升轉換成 20 分公升，以利於用整數計算；對於小明來說，可能由於分數當成一個實體的觀念還不夠成熟，因此便儘量利用他所熟悉的整數來處理分數運算子問題；而之前的題目設計常可讓小明利用換算較小單位的作法順利解題。因此研究者便嘗試改變數據，使分數化成小數無法整除，再次觀察小明的解題表現。

五、若 $a\times\frac{c}{b}$，且 a 不能除盡 b 時，小明只能以小數表示$\frac{a}{b}$的值，未能再進一步求出$\frac{a}{b}\times c$

原案五(940103)

問題 9、彩帶長 2 公尺，用去了其中的$\frac{1}{3}$，用去了幾公尺？

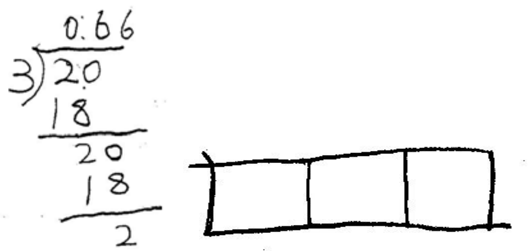

圖 4-9　小明的問題 9 解法

(問題 9 訪談)

0501I：可以解釋一下你的算式嗎？

0502S：2 公尺的$\frac{1}{3}$就是要除以 3，算出來是 0.66，但除不盡

0503I：那以分數表示應該是多少呢？

0504S：不知道

0505I：那這一題的答案是多少？

0506S：0.66 吧

問題 10、彩帶 3 公尺，用去$\frac{4}{7}$，則用去多少公尺的彩帶？

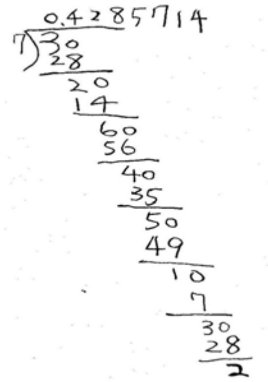

圖 4-10　小明的問題 10 解法

(問題 10 訪談)

0507I：請解釋一下你的算式

0508S：3 公尺除以 7…但是除不盡

0509I：為什麼要除以 7？

0510S：先 7 等份

0511I：那 7 等份之中的 1 份是多少

0512S：0.4285714…除不盡

0513I：如果將你算的結果取到 0.42 呢？試著接下去作

0514S：(思索了一會)沒辦法

分析五

研究者鑒於原案三與四的小明慣用轉換單位以化成整數的情形，調整原案五的被乘數使其除以分母後無法整除。小明在問題 9 雖利用除法，得到 2 公尺的$\frac{1}{3}$是 0.66….；但並無法以分數表示其運算結果(行號 0504)。研究者接著提出問題 10，小明雖同樣的以小數表示 3÷7，也知道(3 公尺)其中一份的大約長度(行號

0512)，但無限循環小數卻困擾著小明接下來的運算，經研究者提示可將除法的結果取到小數點以下第二位，觀察是否能完成接下來的運算；但小明仍未能完成之後×4 的動作(行號 0513、0514)。

伍、結論與建議

研究者從前述研究結果中小明所使用的策略與解題概況，分別說明如下：

一、結論

(一)小明利用先等分後複製作爲解決運算子問題的基本策略

在上節所有原案中可發現小明對於運算子的問題能夠以先除後乘的策略來幫助解題。也就是說小明對於運算子的題目，先利用除法求得一個最小的單位量，形態可能是整數(問題 1)、分數(問題 4)、小數(問題 3)、甚至轉換成更小單位(問題 3、7 與 8)，然後再乘以分子。由其解題過程，可看出小明能將運算子$\frac{4}{5}$看成是某個量的$\frac{1}{5}$的 4 倍，也就是視爲 4 個$\frac{1}{5}$。

分數運算子構念可視爲是先等分後複製，也可以是先複製後等分的過程。由於學生學習分數是由等分的概念出發，再數需要幾塊；小明的運算子構念也依循類似的過程－先等分後複製。只是這時等分的對象「整體」已不是預設的「1」，而是各式各樣的被乘數。

對小明來說，除以運算子分母以求得一個最小的單位量，是解決運算子問題的基礎。Behr 等人(1997)指出運算子構念分成 DPR 與 SS 子構念，而 DPR 可能是比較自然的想法。而由小明的解題過程觀察 DPR 構念，其中的先除後乘比起先乘後除似乎是較自然的解法。

(二)小明能利用乘法分配律解決帶分數運算子的問題

小明在原案一問題 3、原案三問題 7、原案四問題 8 遭遇到運算子爲帶分數的問題，而小明皆順利的以乘法分配律解答，而非運用傳統化成假分數相乘的算則。儘管小明在工作單後段解帶分數與非單位分數相乘、以及帶分數乘以帶分數的題目都失敗，但小明已能利用乘法分配律解決帶分數運算子的問題。若再配合

原案三問題 7 的情形，其實小明已能運用乘法分配律的概念解決被乘數與乘數其中一量爲帶分數的題目。

(三)小明已達到將分數視爲擬倍數(pseudo multiplier)的層次

Harel(1995)將乘數的角色認知分成三個階段；而觀察小明的解題過程，以原案一問題 2 爲例，可以觀察到小明解 15 的$\frac{4}{5}$乃利用除以分母 5 先找出 15 的$\frac{1}{5}$，再×4 找出 15 的$\frac{4}{5}$，可見他已達到 Harel(1995)所提到將分數視爲擬倍數(pseudo multiplier)的層次。

而觀察小明的解題過程，可發現小明處理運算子的問題時皆利用除法，也就是類似「部份-整體」的想法作等分，因此他的「分數倍」運算子構念似乎仍未周全。

(四)被乘數不能被等分除盡時，小明無法將被乘數等分後的量當作新單位進行解題

在原案五，小明欲運用先等分後複製的方式解題，但面臨到被乘數等分後無法整除的情境。小明雖能以小數表示 3 公尺 7 等分後的結果，但卻無法將 0.428571…(也就是$\frac{3}{7}$)當作一新的單位，也影響了之後的解題。對照劉祥通(2004)研究五年級學生的運算子解題表現來看，運算子構念的認知需能掌握 $A\times\frac{3}{5}=A\times(\frac{1}{5}\times3)=(A\times\frac{1}{5})\times3$ 這類隱含分數乘法「結合律」的概念；對小明來說，亦需能掌握 $A\times\frac{1}{5}$的量或賦予意義(make sense)，才能進一步完成解題。

二、建議

從上述研究結果，研究者從小明的解題情形中提出幾點建議，分述如下：

(一)運用等分割法有助學生建立分數運算子構念

在原案二，小明雖未學過分數除以整數，甚至分數乘以分數，但可以利用圖形或模型將其等分割後表示其過程。例如利用圖形分割解釋$\frac{1}{2}$的$\frac{1}{3}$倍等於$\frac{1}{6}$。

在分數乘除法教學時，教師可多利用圖形或模型說明分割或複製過程，以幫助學生建立運算子構念。這也就是 Lamon(1999)所說的利用模型確認以單一分數表示兩個分數合成的情形。

(二)確認被乘數等分後的新單位量有助於學生運算子構念的發展

由小明的解題過程來看，先等分後複製是分數運算子的基礎；因此若能充份掌握等分之後的新單位量，便有利於執行之後複製的工作。呂玉琴(1994)強調，「無論處理任何分數相關的問題，最重要的一件事就是確認單位量」。觀察小明的解題過程，不管是用圖形、算式，小明在進行等分的過程中，必先等分成自己可以掌握的量，例如更小單位的整數、小數、或是反應在圖形上的分數，接下來才能進行複製的過程。同樣的在原案五，小明未能掌握 3 公尺 7 等份之後的量，因而影響了解題。假使小明能準確指出 3 公尺 7 等份之後的量就是$\frac{3}{7}$，應有助於小明解決分數運算子問題。若學生在運算子構念問題發生困難時，教師可先確認學生是否能正確指認被乘數等分後的單位量，以作為該類問題的診斷或補救教學參考。

(三)後續研究

小明雖能正確解出部份的運算子類題，但無法解難度更高的帶分數乘以非單位分數的類題。其認知發展關鍵與瓶頸為何，是否與被乘數等分後的單位量指認，或是學生「分數倍」的概念建立直接相關，則有待後續研究探討。此外，如何利用教學活動提昇學生對於分數運算子構念，幫助學生建立「分數倍」的概念，而不僅只於算則的背誦，也是值得探討的研究問題。

致 謝

本研究係國科會計畫（NSC 93-2521-S-415-001）的部分成果，感謝國科會的贊助，也感謝匿名審查教授的寶貴意見。

參考文獻

呂玉琴(1994)：**國小教師分數教學之相關知識研究**。台北：國立台灣師範大學科

學教育研究所博士論文(未出版)。

甯自強(1998)：涂景翰的數概念。**科學教育學刊，6(3)**，255-269。

黃瑞琴(1991)：**質的教育研究方法**。台北：心理。

劉祥通(2004)：**分數與比例問題解題分析：從數學提問教學的觀點**。台北：師大書苑。

郭生玉(2002)：**心理與教育研究法**。台北：精華。

Armstrong, B.E. & Bezuk, N.(1995). Multiplication and Division of Fractions: The Search for Meaning. In J.T. Sowder & B.P. Schappelle (Ed.), *Providing a Foundation for Teaching Mathematics in the Middle Grades*. (pp.85-119). Albany, New York: State University of New York Press.

Behr, M.J., Harel, G., Post, T.R., & Lesh, R.(1992). Rational Number, Ratio, and Proportion. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp.296-333). New York: Macmillan.

Behr, M.J., Harel, G., Post, T.R., & Lesh, R.(1993). Rational Numbers: Toward a Semantic Analysis- Emphasis on the Operator Construct. In T.P. Carpenter, E. Fennema, & T.A. Romberg (Ed.), *Rational Numbers: an Integration of Research*. (pp.13-47). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Behr, M., Khoury, H., Harel, G., Post, T., Lesh, R.,(1997). Conceptual Units Analysis of Preservice Elementary School Teachers' Strategies on a Rational-Number-as-Operator Task. *Journal of Mathematics Education*, *28(1)*, 48-69.

Behr, M.J., Lesh, R., Post, T.R. & Silver, E.A.(1983). Rational-Number Concepts. In R. Lesh & M. Landau (Ed.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. (pp.91-126). Orlando, Florida: Academic Press.

Boulet, G.(1998). On the Essence of Multiplication. *For the Learning of Mathematics*, *18(3)*, 12-18.

Cobb, P., & Steffe, L. P.(1983). The Constructive Researcher as Teacher and Model

Builder. *Journal for Research in Mathematics Education*, *14(2)*, 83-94.

Creswell, J. W.(2003). *Research Design: Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches*. Thousand Oaks, California: Sage Publication.

Goldin, G. A.(2000). A Scientific Perspective on Structured, Tasked-based Interviews, in Mathematics Education Research. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Ed.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education.* (pp. 517-545). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Guba, E. G. & Lincoln, Y. S.(1981). *Effective evaluation: Improving the usefulness of evaluation results through responsive and naturalistic approaches*. San Francisco: Jossey-Bass.

Harel, G.(1995). From Naïve-Interpretist to Operation-Conserver. In J.T. Sowder & B.P. Schappelle (Ed.), *Providing a Foundation for Teaching Mathematics in the Middle Grades*. (pp.143-165). Albany, New York: State University of New York Press.

Kieren, T.E.(1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In R. Lesh (Ed.) *Number and measurement: Papers from a research workshop*. Athens: University of Georgia.

Kieren, T.E.(1993). Rational and Fractional Numbers: From Quotient Fields to Recursive Understanding. In T.P. Carpenter, E. Fennema, & T.A. Romberg (Ed.), *Rational Numbers: an Integration of Research*. (pp.49-84). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S.J.(1999). *Teaching fractions and ratios for understanding essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

A Fourth Grader's Performance on Solving Fraction-as-Operator Tasks

Han-Hao Shih[1]

Shiang-tung Liu[2]

[1] Hemei Junior High School, Changhua County

[2]The Graduate Institute of Math Education, National Chiayi University

Abstract

The purpose of this study was to explore a fourth grader's performance of solving rational numbers as operator tasks. The study was a case study. The task-based interview technique was conducted whilst collecting data, and the interview based on the student's task-writing.

The major findings of this study were as follows: (1) the student applied duplicator/partition-reducer with partition-reducer first, then applied this to solve the problems. (2) He applied distributive law to solve the problems when the operators of those problems were mixed fractions. (3) His cognition of multipliers has reached "pseudo multiplier" stage. (4) If the original quantity could not be evenly divided, he was not able to take the quotient, the new quantity, as a new unit to generate the solution for the problems.

Key words：rational number, constructs, operator, case study