數學表徵應用在教學上的探究

陳霈頡[1]　楊德清[2]

[1]嘉義縣東石國小　[2]國立嘉義大學數學教育研究所

（投稿日期：94 年 7 月 27 日；修正日期：94 年 8 月 12 日；接受日期：94 年 8 月 17 日）

摘要

民國 67 年起二十餘年來經歷了四次的課程修訂，但表徵在不同課程時代皆佔有一席之地，教育改革的浪潮也越來越強調數學表徵的重要性。本文將深入探討表徵的意義及其在教學上的功用，和分析表徵在個人活動和文化傳遞關鍵的角色扮演，並藉著分享一年級數學課室教學中學生的解題表徵，發現學生能運用表徵釐清內在思考，同時也因為認知思考的改變或提升而變換表徵的型式，可見得數學表徵和解題認知思考是相輔相成的，所以在教學上，教師應引導學生善用表徵並適時幫助學生提升其認知思考層次，使學生能結合多元表徵和靈活思考，並發展有邏輯的解題策略於生活應用中！

關鍵字：數學表徵、一年級課室教學、認知思考、課程改革

壹、從數學課程改革探討數學表徵的運用

臺灣國小數學課程在近二十餘年來經歷了四次的修訂，而一次次的修訂區間也越趨縮短，從各次的課程修訂特色來看，可以分爲強調使用教具的數學課程時代（67 年-89 年）、強調知識建構的數學課程時代（85 年-92 年）、強調能力培養的數學課程時代（90 年起）、強調計算能力的數學課程時代（94 年起）。

無論是六十四年版、八十二年版到九年一貫數學課程，無不強調數學概念的抽象化過程。六十四年版強調透過具體、半具體到抽象；八十二年版強調具體活動、表徵活動到抽象活動；九年一貫強調學習的方式在不同階段的特徵爲具體操作、具體表徵、類化具體表徵到符號表徵，可以看出課程改革的三大時代都運用表徵來幫助學生發展概念。因此教學時，要顧及兒童的心智發展，適時地運用表徵與學生溝通題意、理解解題活動的過程意義，進而運用表徵於解題活動。

貳、表徵的探討

一、表徵的意義

表徵是認知活動中的產物，我們可以經由表徵形式以瞭解知識的結構與內涵。在數學學習中，表徵可用來呈現數學概念與思維，它除了是數學本質上的一環，也是數學概念外在具體化的呈現形式。教師在課堂上必須使用某一種語言，來與學童溝通一個數學問題，學童亦需要使用某一種方式，來和教師或其他同學，溝通他的數學想法、解題過程或結果，在如此互動的學習環境中，語言是一個不可或缺的媒介。而在數學學習的過程中，語言並不限定於使用書寫或口語的符號，因而數學教育採用「表徵」來代替「語言」。表徵可以爲任何一種型式，其功能在於表達想法，它並不限於與外人溝通，也是自己與自己溝通的工具，可以記錄自己數學活動經驗的工具，以便於事後的反省。當表徵所表現的意義能確實掌握後，可以進一步地成爲運思的材料，以簡化解題過程，並使概念能以某種方式呈現。

二、表徵的功用

（一）作爲運思材料

Bruner（1966）藉由區分運思材料爲三種表徵的形式爲：動作表徵、圖像表徵、符號表徵。動作表徵是兒童的運思必須借助於實物或具體物的實際操弄活動來達成；圖像表徵是當具體物消失時，在兒童的腦中能依據實物的影像，自己製作心像而進行內在的運思活動；達到運思的活動階段之兒童能以抽象運思的數學符號進行運思的活動。在活動中，先獲得圖像或符號表徵的意義，當其意義穩固後，才可進一步地使用圖像或符號表徵爲材料，進行運思活動。換言之，圖像及符號這些較抽象的表徵，是在學習經驗中發展出來的，它們是心智活動的產物。因而智慧的成長，是運思活動逐漸地不依賴外在的刺激。基於上述的理念，劉秋木（1977）認爲在數學教育中，要供給兒童適當的具體學習經驗、半具體學習經驗、及抽象的學習經驗。例如 6÷2＝（　），先讓小朋友實地去操作，把 6 個花片平分給 2 個小朋友，藉

著反覆具體物的操作成爲心像，當學生下一次面臨類似的除法問題，他可以平分腦中存在的圖像，這時圖像爲他運思的對象，幫助學生將運思活動對應到符號中，在屢次的經驗中了解並內化得到 $6÷2=3$。

（二）作爲溝通媒介

Lesh（1979）以溝通的觀點，將 Bruner 的動作、圖像、和符號表徵的運思活動以線性方式的發展修正爲平面網狀式的互動發展，而提出數學學習的五種表徵：實際情境（real-world situations）、圖畫（pictorial）、教具（manipulative aids）、口語符號（spoken symbols）、書寫符號（written symbols）。Lesh 主張利用不同表徵系統來表徵題目時，會影響學生的思考，他同時強調學童能否在不同的表徵方式中自由轉譯（translation），表示其對概念意義的掌握的程度。以分數爲例，Rowan 等人(1990)將 $\frac{1}{4}$ 的五種表徵圖示如下：

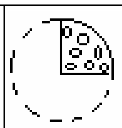
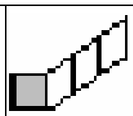
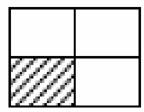
$\frac{1}{4}$	四分之一			
符號	口語符號	實物	模型	圖像

圖 2-1. $\frac{1}{4}$ 的表徵方式(Rowan et al, 1990)

（三）比較 Bruner 和 Lesh 的觀點

比較 Bruner 與 Lesh 討論不同的表徵型式，因爲他們的觀點有所不同，所以即使他們使用同樣的名稱，其功能可能完全不同。在 Bruner 的觀點中，表徵是個人運思活動所運用的材料，依運思的抽象程度形成動作、圖像、與符號的表徵，其中符號運思是指用符號來掌握概念，對符號進行運思。而符號與心像不同之處在於符號本身是一個隨意選擇的記號，與實物之間無任何類似之處，代表了實物與心像的某一種抽象意義，而這些抽象表徵是在學習經驗中發展出來的，亦即學生從具體活動中了解抽象數學表徵的意義，才能運用符號來進行運思。所以依照 Bruner 的理論，不同的表徵代表的是運思的抽象程度，並不必然需要與外人溝通。

Lesh 的表徵理論，結合 Bruner 主張的表徵在深度的提昇外，並添加表徵在廣度的學習。因此他增加了實物情境和口語符號兩種表徵，並且強調各種表徵之內和表徵之間的轉換。Lesh 是從文化的觀點討論表徵，他認爲符號表徵不僅是個人心智活動的材料，而且是一種文化規約的溝通工具，意味著一些約定成俗的共識，例如線段圖（圖 2-2）是一個圖畫表徵，線段圖格式的共識，是文化傳遞的結果，並不是 Bruner 所討論的由行動中自然形成心像的圖象表徵，所以不宜將其視爲 Bruner 所討論的圖像表徵。

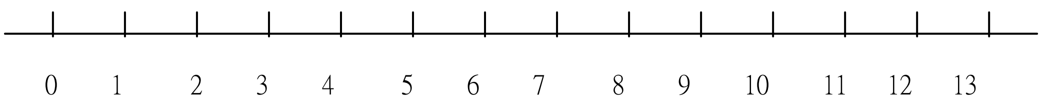


圖 2-2. 經由文化傳遞的圖畫表徵

（四）綜合說明

表徵的運用使得解題的過程意義化、合理化、生動化，學生認知發展和操作不同層次的表徵是相輔相成的。藉由表徵的操作來逐漸的提昇兒童的認知發展，也藉由認知發展的提昇去操作較高層次的表徵，讓兒童在多重表徵之間如魚得水的轉換，實爲建構數學知識的一大跳板！學童若能用表徵和他人溝通，說明解題過程與理由，才表示其真正瞭解概念，也才能靈活運用該概念於生活中。九年一貫課程總目標強調的是「能力的開拓」，也就是強調解決問題以及與人溝通等各種能力的培養，而表徵正是與人溝通的媒介。所以若是教學者能善用表徵，配合學習者的認知發展，讓它可以在一層層的表徵中慢慢躍進，最終得以在多重表徵之間自由來回轉譯，那麼便能宣稱學童獲得完整概念的學習，學生也才能獲得帶著走的能力！

三、依數學學習觀點探就不同面向的表徵涵義

就數學學習來說，我們可以區別外在表徵與內在表徵。數學概念的外在表徵包括整個數學符號系統、圖表、數表、模型、圖象等等，最簡單莫如阿拉伯數字「5」、中國數字「五」、英文「five」、羅馬數字「v」等，都可以代表「五」這個數概念，這些都是「五」的外在表徵。又例如 52×31=1612，以下爲其中一種外在表徵：

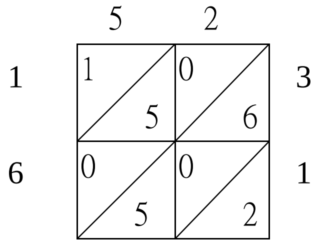


圖 2-3. 二位數乘法的外在表徵

1　2

至於內在表徵，主要是指心理表徵，是學習者頭腦裏面所建立的某種形式的表徵。心理表徵不可能直接被觀察，但可以從學習者在處理數學概念、解決數學問題時的種種表現推斷其輪廓。而當我們要討論學習者對某個數學概念的內在表徵時，我們必須利用某種「外在」的表徵方式來加以描述，否則我們是無從討論起的。

由圖 2-3，我們可以從他們解題時所運用的外在表徵窺探得知他們的內在表徵：學生嘗試以斜線劃分個位、十位、百位、千位，其思考層面和用直式作答是相同的。由此可見得外在表徵可以起一種作用，對應到學習者的思考層面，協助思考活動的進行。如果學習者的意識中能建立相對應的概念，理解外在表徵及其各種操作，那麼外在表徵就能表達其所對應的目標概念及其種種運算關係。但是如果學習者只能在符號等外在表徵層面上記憶及操作各種運算，則在缺乏意義貫通的情況下要掌握有關的運算程序會是緣木求魚的！

參、分享小一兒童在數學課室中所呈現之解題表徵與思考層次

一、基本題：15－6＝（ ）

（一）圖像表徵：

1、

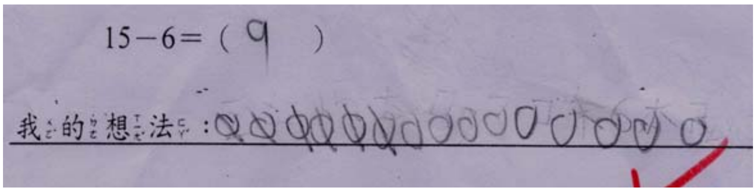


圖 3-1. S1 的圖像表徵

S1 沒有辦法很快知道數字和手指頭的關聯，例如遇到 15－6＝（ ）的問題時，他沒法直接比出 15，必須從 1 開始數，減去 6 後也沒辦法馬上辨識出剩下的手指頭就是 9。所以在解答本題時，他嘗試多次後，選擇使用畫圈圈的方式來確保正確及方便。S1 屬於序列性合成運思，從 1 開始畫了 15 個圈圈，減去 6 個圈圈後，再數剩下有 9 個圈圈，是從頭開始全部數的策略。

（二）結合動作和語言的表徵：

1、

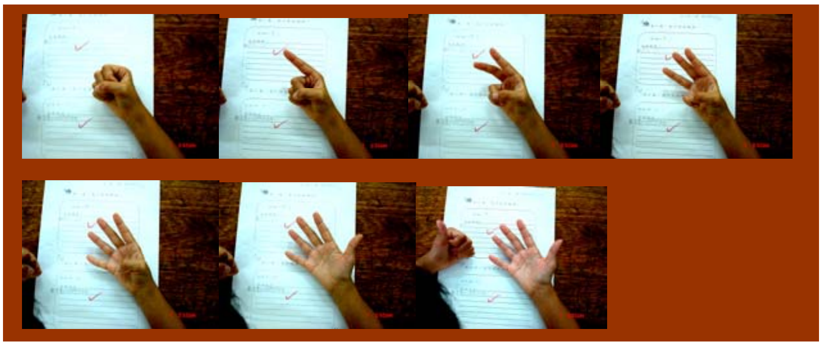


圖 3-2. S2 的動作表徵

S2 採用往下數策略,比出 0、1、2、3、4、5、6，語言表徵爲十五、十四、十三、十二、十一、十、九，對應爲 15、15－1＝14、15－2＝13、15－3＝12、15－4＝11、15－5＝10、15－6＝9。

2、

圖 3-3. S3 的動作表徵

S3 把左手當作十位，右手當作個位，左手比 1，右手比 5，當作 15，折指從 4、3、2、1、0，語言表徵為一、二、三、四、五，對應到減 1 等 14、減 2 等於 13、減 3 等於 12、減 4 等於 11、減 5 等於 10，這時需要把左手的 1（表示十位）變成 10 根手指頭，再減 1 根（心中對應到減 6），最後剩下 9 根。S2 和 S3 同屬於累進性合成運思，都是從 15 開始倒數 6 個數到達 9，是往下數策略，S3 和 S2 明顯有區別在於 S3 具備位值概念。

3、

圖 3-4. S4 的動作表徵

S4 結合內在表徵，腦中已經先把 5 減去，一開始就比出 10，語言表徵為十，剪掉 1 根手指頭時，心中辨識出減去 6 後剩下 9 根手指頭，此時語言表徵為九。S4 的認知思考層次為部分--全體運思：把 15 分成手指的 10 和心像的 5，扣除心像中的 5 後運用累進性合成運思：心中從 5 往上數到達 6，所以再扣除 1 後剩餘 9。

（三）書寫符號表徵

1、

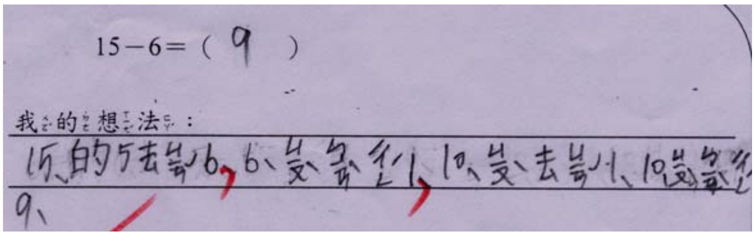


圖 3-5. S5 的書寫符號表徵

S5 具有部分全體運思概念，把被減數 15 分成 10 和 5，先用 5 減去 6，使得減數 6 剩餘 1，再把 10 減 1，得到答案等於 9。S5 比較特別的是，他嘗試用小數減去大數，例如面臨到小減大的時候〔如 5－6〕，他能夠思考還缺少 1。

2、

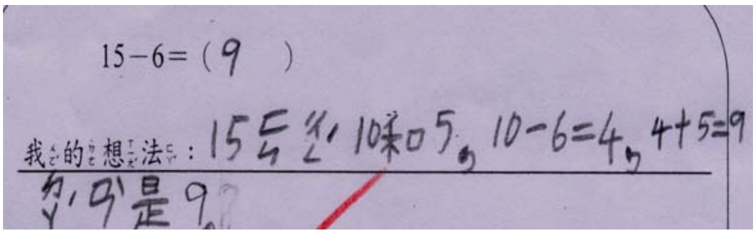


圖 3-6. S6 的書寫符號表徵

S6 運用部分全體運思把 15 分成 10 和 5，和 S5 相異之處是採用大減小策略，先用 10 減去 6 等於 4，再把 5 加回來等於 9。S5、S6 可以自由的分配和操弄數字，已經具備抽象運思了。

（四）小結

上述是一年級下學期六個學生對於減法的解題表徵，而按照教學者上課教材康軒板的數學課程設計，一年級上學期初主要以序列性合成運思爲主，到了上學期末以發展累進性合成運思爲主，下學期累進性合成運思穩固後開始導向部份全體概念。從學生的解題表徵中，我們可以發現學生之發展層次其實是多樣化的，因此教師在教學時應多思考如何引導學生學習。當然每一個學生的認知發展先後不一，須等他在這一階段發展穩固後才能夠躍至更高層次的運思，藉著經驗觀察並適時引導學生發展，一定能協助學生建構牢固的數概念。

二、挑戰題：50－18＝（　）

（一）　圖像表徵

1、

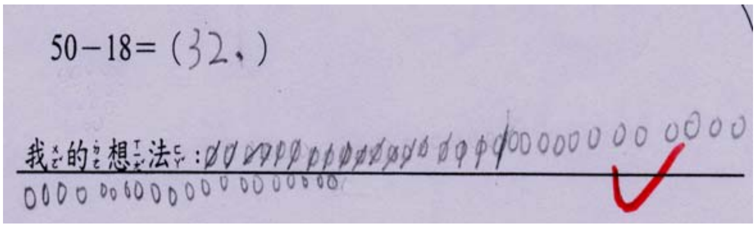


圖 3-7. S1、S2 的圖像表徵

當突然出現比平常大的數時，認知發展層次較低的孩子會傾向使用畫圈圈-全部數策略，包括 S2 在基本題時是採用向下數策略，但是遇到數字變大的挑戰題後就改用全部數策略。從基本題到挑戰題，班上從原本約$\frac{1}{3}$的孩子運用序列性合成運思增加到約$\frac{3}{5}$的孩子，從這裡可以看出當題目加深時，部分的孩子會退回用最低階、最原始的層次解題。

2、

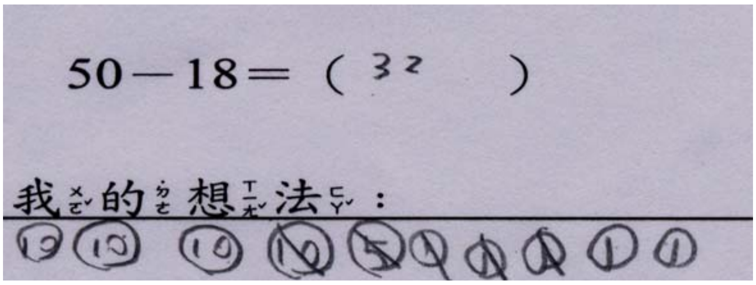


圖 3-8. S4 的圖像表徵

S4 在數字小的時候，用手指頭表徵數字，她用 1 根手指頭表示 1；2 根手指頭表示 2；3 根手指頭表示 3…等等，可能因爲 10 根手指頭加上心象所能負荷的量不超過 20，所以她面臨數字超過 20 的計算題時，無法進行比數策略，於是改用錢幣來表徵算式。因爲 S4 在心像中知道需要劃減去 18，所以她把 50 畫成 4 個 10、1 個 5、5 個 1，以便劃減。由 S4 的圖像表徵可以看出其認知思考已經到達部分全體運思。從

基本題到挑戰題，S4 的認知思考層次從結合累進性合成運思和部分全體運思提升到運用部分全體運思，是班上唯一一個面臨數字更大的挑戰題時，認知思考層次提升的孩子。

（二）結合動作和語言表徵

1、

圖 3-9. S3 的動作表徵

S3 面對數字比較大的減法問題時沒有改變策略，可能因爲 10 根手指頭可以表徵到 2 位數，所以依舊左手當十位比出 5，右手當個位比出 0，右手折指從 9、8、7、6、5、4、3、2、1、0，語言表徵爲一、二、三、四、五、六、七、八、九、十，對應到減 1 等於 49、減 2 等於 48、減 3 等於 47、減 4 等於 46、減 5 等於 45、減 6 等於 44、減 7 等於 43、減 8 等於 42、減 9 等於 41、減 10 等於 40，週而復始，比到答案等於 32，語言表徵爲十八，對應到減 18 等於 32。從基本題到挑戰題，S3 是維持原來的累進性合成運思中少部分的學生之一，原先基本題時運用累進性合成運思的孩子將近全班的一半，而面臨挑戰題時，運用累進性合成運思的孩子只剩下約 $\frac{1}{5}$ 的孩子，大部分的孩子的思考層次都下降至序列性合成運思。

（三）書寫符號表徵

1、

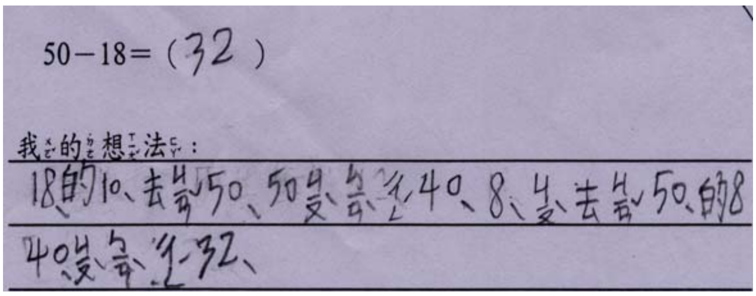


圖 3-10. S5 的書寫符號表徵

S5 運用合成分解運思解題，言語上有用詞顛倒的情形產生，他先用 50 減去 10，再把剩下的 40 減去 8，可以心算得到 32。

2、

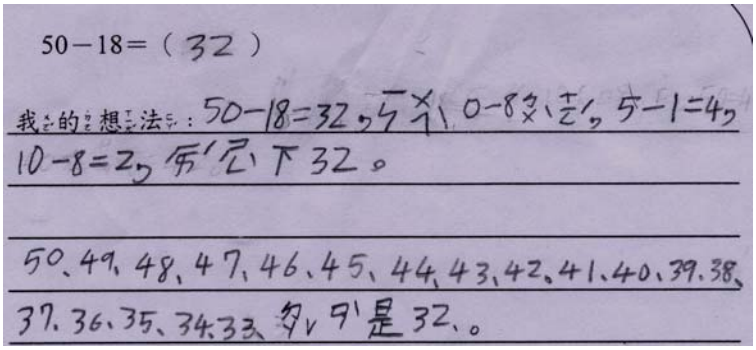


圖 3-11. S6 的書寫符號表徵

S6 因爲初次遭遇比較大的數字，所以感到不放心，於是用往下數策略來驗證自己的答案。S6 從基本題到挑戰題時，表徵方式有些不同，S6 平時大多運用部分全體運思來解題，但面臨數字較大的挑戰題時，她雖然選擇部分全體運思解題，但是也加以運用累進性合成運思來檢視答案。S5、S6 從基本題到挑戰題，依然使用原先的部分全體運思去解題，顯然他們的部分全體運思已經很穩固了。而從基本題到挑戰題，依舊維持原先約$\frac{1}{5}$的學生使用部分全體運思去解題，顯然從整體上看來，這些運用高層次思考的學生較能靈活思考、運用策略去解題。

（四）小結

教學者在進行本教學時，課程中的減法算式只探討到二位數減去一位數，所以當學生面臨到二位數減去二位數時，部分學生會延用類似的策略解題，部分學生會退到較低的層次解題，但都是盡量選擇自己比較有信心的策略去解題，S6 是屬於後設認知較強的孩子，她會運用不同的策略去驗證她的答案。這些關於學生認知思考層次的判斷都是從學生的解題表徵中得來的，教師應該了解學生的表徵和思考，從而協助學生釐清可能的迷思概念和錯誤，並適時幫助學生彈性運用表徵並提升思考層次。

肆、結論與建議

從上述學生的解題中，我們可以發現孩子的表徵是多樣化的，且根據不同學生認知的發展而有不一樣的變化。或許有些教師會把學生不一樣的解題表徵視爲理所當然，認爲只要答案對就可以了，方法當然隨人而異，而不去思考這些變化或根本沒有看見這些變化。這種想法是需要修正的：因爲隨著心智發展程度，孩子會發展出自己可以賦予意義的想法，這些想法其中的異同是需要教師用心去體會的，甚至是刻意去捕捉的，並藉由孩子多元的表徵來了解孩子的思考方式，並適時的運用教學方法引導孩子提升至更高層次的思考。

如何藉由孩子相異的表徵來提升孩子的認知層次呢？或許可以採用讓孩子發表的方式，讓每一個小朋友可以欣賞他人的解法，藉著同儕之間的互動或模仿，刺激彼此認知的發展。亦或可以讓學生討論並比較大家的做法，除了可以讓學生明白每一種作法都有其功用之外，也可以讓學生去體驗或是選擇自己傾向使用的方法。

此外，教師最好能夠在學生討論的時候辨別學生作法的異同，而選擇不一樣的做法，讓學生上台發表，以掌控課堂教學和學習的時間。根據筆者的教學經驗，我發現讓小朋友去欣賞他人的做法之後，有大部分的學生雖然明白他人的做法，甚至在小組討論後發現他人做法的確比較便利，但是當他們下次在遭遇類似的問題時，還是選擇自己原先的方式，而少部分學生會選擇採取其它更高層次思考方式解題，筆者認爲這是往後值得繼續探討的問題！

從以上的教學實例中筆者也發現，鼓勵學生將自己的想法紀錄下來，搭配口語的表達，或是結合動作的表徵，會提升孩童每一次的邏輯思考和答題的合理性，漸漸的使得孩子每一次答題時有更明確的思考和具備更穩固的信心！所以教師應該盡可能給予孩子時間去發揮，鼓勵孩子用自己的方式表徵數學概念，說明自己爲何這樣思考？並讓其他小朋友共同討論發現哪裡出了問題，應該如何修正？教師也該適時的提供開放性的問題刺激學生思考，給予機會讓學生將心中的想法表現出來，並藉著操作表徵得到解題過程的理解、溝通與解決問題。

許多成人已發展出數概念方面的抽象表徵能力，因此在教導孩童數概念或運算時，常以自己的角度佈題，並以自己已具備的解題模式教導，並沒有考慮兒童的認知發展，而要求學生以最有效率的方式在有限的教學時間中學會解題技巧，這樣便導致今日大部分學生概念性知識薄弱的普遍現象！身爲影響學童認知最爲深遠的第一線教師，我們應該要多了解學生的認知，同時鼓勵他們用自己的方式表徵，並協助引導學生發展合理的多元思考和運算過程來解題。教育是一份良心事業也是一份純真的工作，我們的努力直接關係著學童不遠的未來，『凡走過必留下痕跡』，希望在我們的教育之下，學生能夠結合多元表徵和靈活思考，發展出有邏輯的解題策略並應用至日常生活中！

參考文獻

康軒文教事業（2005）。第二冊數學科教學指引。康軒文教事業出版。

黃家鳴（1997）。淺談數學概念表象在數學教學上的一些問題（上）。香港：數學教育學會刊物第五期。
http://www.fed.cuhk.edu.hk/~fllee/mathfor/edumath/9712/05WONGKM.html。

楊美伶（2003）。教師如何因應數學課程的變革。國民教育，44（2），27-31。

劉好（2002）。問題出在哪裡。南一版九年一貫課程特刊網路版，
http://www.nani.com.tw/big5/content/2003-04/16/content_21641.htm。

劉秋木（1977）。數學教學的決定因素和專業素任。見台北市立師專研習中心主編。國民小學數學研習教師手冊。

蔣治邦（1994）。由表徵觀點探討新教材數與計算活動的設計。臺灣省國民學校教師研習會編印。

簡佳雯〔2003〕。談表徵對數學教學的重要性。翰林文教雜誌網路版 32 期，
http://www.hle.com.tw/bookmark/edu/9203-edu1/edu01-4.htm。

Bruner, J. S.（1966）. Toward a theory of instruction. Cambridge, MA: Harvard University.

Cai, J.（2001）. Improving mathematics learning：Lessons from cross-national studies of u.s and chinese students. Phi Delta Kappan, 82（5）, 400-405.

Lesh, R.（1979）. Mathematical learning disabilities: Considerations for identification, diagnosis, and remediation. In R. Lesh, D. Mierkiewicz, & M. G. Kantowski（Eds.）. Applied mathematical problem solving. Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

National Council of Teachers of Mathematicss（1989）. Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

Rowan, T. E., Payne, J. N., & Towsley, A. E. (1990). Implementing the standards: Implica-tions of NCTM’s standards for teaching fractions and decimals. *Arithmetic Teacher, 37*(8), 23-26.

Exploring To Apply Mathematical Representation To Teaching

Pei-chieh Chen

Dongshih Elementary School of Dongshih Township, Chiayi County

Abstract

There have been four times of revising curriculum since 1978. Representation plays an important role at different era and the curriculum reform stresses on the importance of mathematical representation. This article will explore the meaning of representation, and analyze the role of representation both in individual activity and culture. With sharing the solving representation of the first-grade students, the author found that students can make use of representation to clarify their inner thought and promoting the ability of representation. We can see mathematical representation and problem solving recognition complement each other. So the teacher should guide students to know how to handle representation and help them promote their layer of recognition thought at the right moment. At the same time students can apply multiple representations and active thinking and develop logical problem solving strategies in life.

Key words：mathematical representation, first-grade teaching, recognition thought, the curriculum reform