分數的整數倍教學實驗

胡蕙芬[1]　　李源順[2]

[1]台北市立國語實驗小學　　[2]台北市教育大學數學資訊教育學系

(投稿日期：94 年 11 月 14 日；修正日期：94 年 12 月 5 日；接受日期：94 年 12 月 6 日）

摘 要

經過文獻探討後，本研究提出利用概念溝通的表徵模式、分數概念的情境結構、整數除法的語意結構來幫助學童有關分數的整數倍教材的數學能力和數學威力的培養。因此，在教材設計的概念性知識方面，主要運用圖形表徵來協助學童理解分數的概念；在解題性知識方面，兼顧乘法的語意結構、分數概念的情境結構，以提供學童豐富多元的問題情境；在分數的整數倍運算的程序性知識上，也給予學童單純的計算題，讓學童熟練演算的程序與方法。在教學方法方面，主要讓學生習得如何連結分數概念或加法概念了解分數的整數倍概念，讓學生利用圖形表徵來進行概念上的溝通。進而培養學生的推理能力。

本研究採實驗研究法，教學實驗對象為五年級學童。評量試題採內容效度和專家效度，信度採折半信度。教學前後分別對學童進行前測、後測和延後測，了解學童的學習成效及概念保留效果。最後依據教學成效提出對教學素材、教

學活動、教學評量、與教學時機的建議。

關鍵詞：數學威力、數學能力

壹、前言

近年來我國的教育改革變動快速。2000 年教育部公佈的九年一貫數學學習領域暫行綱要，編輯委員站在國民教育爲大眾教育的立場，強調應該讓 80%的學童能夠學會，而對於能力較好的學童則可以補充額外的教材；加上制度的變革，使得數學學習領域的上課時數比以前少(參見表一)，因此數學課程比六四年版慢了一點。例如異分母的加法問題六四年版在五年級進行教學，暫行綱要則放在第三階段的六年級進行教學。此舉讓一些關心國家競爭力的學者感到憂心。學者的分析發現，暫行綱要的課程比美國加州課程（2000）慢了一至兩年的時間。例如，異分母的加法問題加州課程也在五年級進行教學。加上學者對坊間所謂建構式教學的疑慮，使得數學學習領域課程綱要修訂的編輯委員大幅異動。至 2003 年教育部公佈九年一貫數學學習領域課程綱要，其內容與暫行綱要的內容差異相當大。依據研究者的比對，課程綱要的內容比課程暫行綱要的內容多了許多，且有些內容的教學時程又提前一至兩年的時程，例如有關分數的整數倍教學課程暫行綱要放在小五與小六來教學，課程綱要則放在小四與小五教學，兩者相差一年。兩者之所以有如此的差距，是課程綱要的編輯委員考

慮到國際競爭力的問題，因此把數學教材的難度提升到前五、六成學童學習爲主(民生報，2003)，其他的學童則建議利用補救教學幫助學童學習。

國科會爲了因應此一課程改革，認爲應有實徵的研究來支持國家課程的訂定，因此推動各數學單元的詮釋計劃。希望開發各單元的教學素材、教學活動、以及評量建議，做爲課程改革的實徵資料與建議依據。

表一　九年一貫與八二年版數學學習領域每週學習節數一覽表

年級	一	二	三	四	五	六	七	八	九
九年一貫	2~3	2~3	2.5~3.75	2.5~3.75	2.7~4.05	2.7~4.05	2.8~4.2	2.8~4.2	3~4.5
彈性節數	2~4	2~4	3~6	3~6	3~6	3~6	4~6	4~6	5~7
八二	3	3	4	4	6	6	3	4	2+(2)

年									

本研究在整個詮釋計劃的帶領下，負責分數四則運算單元的詮釋研究。本文則是有關分數的整數倍相關研究成果。

貳、研究目的

在社會建構的理念下，本研究的重點是在設計一個強調分數的整數倍教案，探究這個教案對五年級學童的教學成效，最後提出教學實驗的建議。相對於本研究目的，本研究要探討的問題如下：

一、本教學實驗的教學設計理念爲何？

二、本教學實驗的學童在分數的整數倍學習成效如何？

三、本教學實驗對分數的整數倍相關教學素材、教學活動、教學評量、與教學時機的建議爲何？

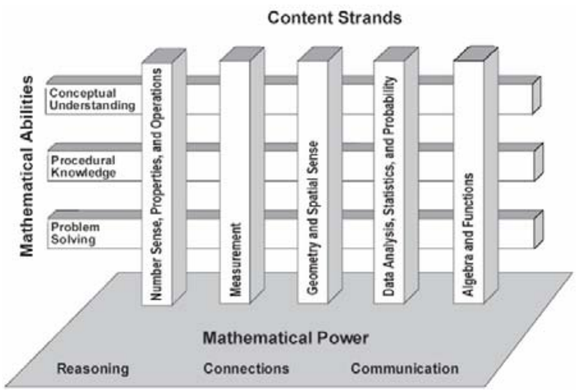
本研究之所以僅選擇分數的整數倍進行教學實驗，是因爲現行教材及實驗學校規定，國小五年級僅進行分數的整數倍教學。

参、文獻探討

本研究先探討有關分數的整數倍相關文獻，包括分數的整數倍教學素材、學童認知、教學方法等，做爲設計本教學實驗的參考依據。

本研究探求可以做爲研究理念的文獻，發現美國 National Assessment of

Educational Progress [NAEP](NAGB, 2002)從 1996 年起到 2000 年、2003 年的數學教育成就評量，就提出數學內容(Content Strands)、 數學能力(Mathematical Abilities)、數學威力(Mathematical Power)三個向度的評量架構(參見圖一)。雖然它是一個評量的架構，但也適合做爲教學的架構，因此，我們以此架構爲基礎，做爲探究分數的整數倍運算的教學實驗理念架構。



圖一 美國 NAEP 的數學評量架構圖

一、數學威力

現今數學教育的理念是要培養學童的數學威力(Mathematical Power)，因此，美國 NAEP(NAGB, 2002)在 1996 年之後的評量架構增列了此一向度。此一向度的內涵，在我國九年一貫數學領域課程暫行綱要和課程綱要(教育部，2000，2003)中也可以看到。

美國 NAEP(NAGB, 2002)認爲數學威力是*學童有全面性的能力能結合和使*

用數學知識去進行探究、臆測、邏輯推理、解決非例行性的問題；能進行數學的溝通；以及能在數學脈絡之內，或其他的學科脈絡進行連結。因此，NAEP(NAGB, 2002)認爲數學威力是由推理(Reasoning)、連結(Connections)和溝通(Communi

cation)三個因子組成。

依據 National Council of Teachers of Mathematics[NCTM](2000)的學校數學原

則與標準(Principals and Standards for School Mathematics)：

推理是指學童能認知數學的基本內容，學童能進行探究與數學臆測，學童能發展對數學論證的評價，學童能選擇使用不同的推理和證明方法。

連結是指學童能理解並進行數學概念間的連結，學童能了解數學概念是環環相扣的體系，學童能在數學外的領域辨認和使用數學。

溝通是指學童能透過溝通強化數學思維，學童能和同學、老師及他人溝通他們的數學思維，學童能分析和評估他人的數學思維和策略，學童能使用數學語言表達他的數學概念。

我們認爲培養學童的推理、連結和溝通能力不是短暫時間內可以達成的，它需要持久的進行。同時，最好也能在班級的數學教學過程中持續進行，而不是只在正規的數學內容教學之外進行。因此，我們將探求一種可以在數學課室

中培養學童數學威力的教學脈絡。

二、數學能力

美國 NAEP(NAGB, 2002)認為數學能力可以看成學童在特定的數學知識內展現他的數學能力。數學能力指的是概念性了解(Conceptual Understanding)、程序性知識(Procedural Knowledge)和解題(Problem Solving)三個因子。我國大學入學考試中心(林福來，1994)在進行學童試題分析時也採用此一數學能力做為分析的向度。

依據 NAEP(NAGB, 2002)的詮釋：

概念性知識的了解是指學童能辨識以及利用模型、圖形、或符號等不同方式來表達出某一數學概念，或是舉出此概念的相關例子或是反例作為說明；此外，他應能知道一些數學原理(如加法原理、乘法原理)並將原理間做相互連結、比較、以及整合應用。

程序性知識是指學童能在計算的過程中，選擇適當的程序並正確解題；同時，能用模式或符號來檢驗所使用的程序是否正確。

解題性知識是指學童能從資料中逐漸辨識並形成問題；他能瞭解這些資料的充分性與一致性，並能運用相關知識、推理能力，以及採取適合的策略，來找出答案；同時，更能去驗證這些答案的合理性與正確性，並將之推廣。

我們同樣認爲學童的數學能力的培養不是短暫時間內可以達成，它需要持久的進行。同時，最好也能在班級的數學教學過程中持續進行，而不是只在正規的數學內容教學之外進行。因此，我們，將探求一種可以在數學課室中培養學童數學能力的教學脈絡。

三、數學內容

美國 NAEP(NAGB, 2002)所強調的數學威力與數學能力都和數學內容知識息息相關。因爲數學內容知識涵蓋數感、性質與運算，測量，幾何與空間，資料分析、統計與機率，以及代數與函數等範疇，本研究無法全部顧及，只能聚

焦

在數感、性質與運算範疇中的分數的整數倍內容知識方面。

本研究爲了對分數的整數倍運算做適切的詮釋，除了找尋文獻中相關的研究之外，也探究相關的書籍和學者的觀點，了解應如何進行教學，以便提出詮釋的證據。

(一)、概念性了解

在分數的整數倍概念性知識方面，本研究認爲應該***連結***學童的舊經驗 – 整數運算「倍」的概念，讓學童了解分數的整數倍概念性了解是運用整數概念來進行***溝通***。此時才能夠培養學童類化分數的整數倍概念爲其它概念的學習，培

養學童了解如何利用既有概念進行學習新概念的數學***推理***，連結既有概念與新概念，以及利用既有概念溝通新概念的數學威力；同時，培養學童概念性了解的數學能力。

1. 情境結構

從學者們(Behr, Harel, Post. & Lesh, 1992；教育部，2000，2003; 謝堅、蔣治邦和吳淑娟, 2002)的分析，分數概念的教學的情境結構可以分成一維連續量、二維連續量、離散量等情境。

一維連續量指像一條繩子、緞帶、彩帶等，在還沒分割前是一個整體的一維物件。

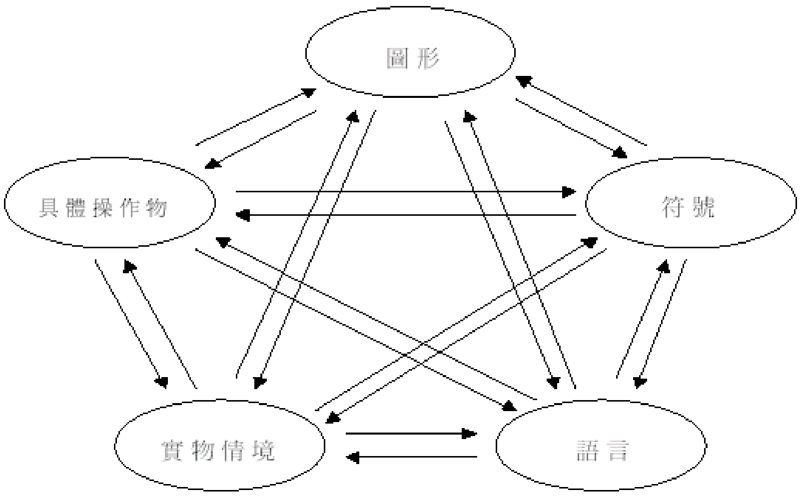
二維續量指像蛋糕、披薩等，在還沒分割前是一個整體的二維物件(一般我們在畫圖時，都把蛋糕等用二維平面的圓形或方形替代)。

離散量指像一盒雞蛋有十顆等，一開始即以離散的個物存在的物件。

依據研究者的詮釋，***連續量情境是學童學習分數概念的合理情境***(一般分數概念都會先從二維連續量入手，一維連續量又可以連結到數線概念)，***離散量則是讓學童連結整數除法與分數概念***(即分數表示整數相除的意涵)以及等值分數***的合理情境***。因此，這些情境結構，在分數的整數倍概念的佈題上，我們認爲有其重要性，應延續採用。

2. 表徵

表徵是將不同事物以不同種類符號來代表的歷程，就認知心理學的訊息處理角度來看，是指訊息處理的過程中，將訊息編碼轉譯成另一種形式，以便處理的歷程(張春興，1989)。學者(Bruner,1966；Lesh, Post,＆Behr,1987；Kaput,1987; Dufour-Janvier, Bednarz, & Belanger, 1987; Greeno, 1987; 蔣治邦，1994)曾從不同的角度，對表徵加以區分。本研究認爲表徵的應用應該著重在概念性的溝通上，因此採用 Lesh(1987)的表徵分類：實物情境、具體操作物、圖形、口語、符號。如下圖二。



圖二 Lesh(1987)的表徵分類

Lesh(1987)的表徵分類可以讓學童經由實物情境、具體操作物、圖像等具體情境與人溝通分數加減法的概念性知識，再慢慢抽象化爲口語、書寫符號等表徵。我國課程暫行綱要的編輯學者們(教育部，2000)認爲分數概念的學習，實物

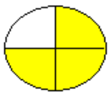
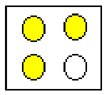
情境與具體物操作適合低年級學童，當學童進入高年級以後已可以經由圖像表徵進行學習。

從學者們(教育部，2000，2003; 謝堅、蔣治邦和吳淑娟, 2002)的分析發現，在上述內容物與情境結構之上，對分數概念的口語、書寫符號等表徵可以區分爲三種，以$\frac{3}{4}$盒蛋糕爲例：

可以從續連量的部份／全體(或離散量的子集合／集合)的觀點說成「把一盒蛋糕平分成 4 份，其中的 3 份」

可以從單位分數計數的觀點說成「3 個$\frac{1}{4}$盒蛋糕」

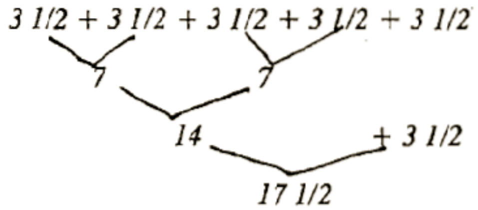
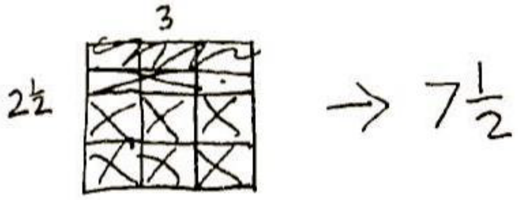
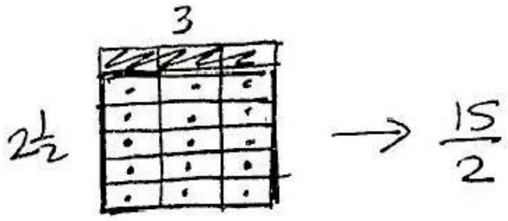
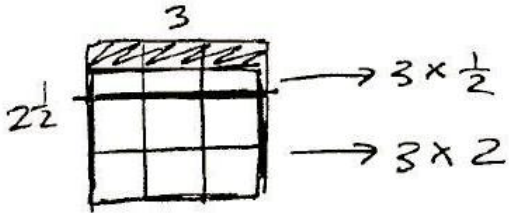
也可以從強調單位量的觀點說成「一盒蛋糕的$\frac{3}{4}$」。

至於圖像表徵方面，可以使用、、等方式來表徵。

在學童分數的整數倍概念表徵方面，Mack(2000)以兩年的時間對四個 4-6 年級的學童進行分數的整數倍概念(包括分數乘以分數)的研究，顯示學童在學習分數的整數倍算則之後，不再只依賴圖像表徵來解題，同時可以將圖像表徵來驗證

和說明乘法算則的解題。但部份學童對於符號表徵與圖像表徵的連結並不穩固。Burns, Marilyn(1999)教五年級的學童做三天有關分數的整數倍概念的討論教學。教學實驗先從整數乘法的概念開始討論，以乘法是累加的觀念，以面積形

式的圖像表徵作爲學童共同討論的基礎，由淺入深再逐漸進入分數的整數倍，最後進行分數的分數倍的計算題討論。發現學童能夠建構出自己的表徵。圖三是學童的符號表徵。圖四是學童的面積圖像表徵，圖五是 Burns(1999)依據學童的解法畫出的表徵，圖六是 Burns (1999)和學童在課堂上共同討論出來的圖像表徵。

 1. 學童 $3\frac{1}{2}\times5$ 的符號表徵	 2. 學童 $2\frac{1}{2}\times3$ 的圖像的表徵
 3. 學童等分割成單位分數的想	 4. 師生共同討論後的面積圖像

法	表徵

黃芳玉(2002)在學童表徵能力的研究中發現：有些學童在面對分數的整數倍時，會選擇以分子與分母同於擴分的方法來運算，例如在$\frac{2}{5}\times 3$的題目中，有20％的學童選擇$\frac{2*3}{5*3}$這個符號表徵，也有17％學童選擇表示$\frac{6}{15}$的圖形表徵；此結果顯示學童對於「分數的整數倍」與「分數的擴分」混淆(陳晚蓁、楊德清，2002；林彥宏，2002；劉世能，2001)。

(二)解題性知識

本研究從文獻中探求分數的整數倍問題解題性知識的相關研究，發現這方面的研究不多。Greer(1992)將整數乘法問題區分為等組(equal-groups)、比較、笛卡爾積(組合問題)、及矩陣或矩形面積等四類。Taber(2002)將分數的整數倍應用題情境分類成等組(combine equal groups)、比較(compare)、改變(change)三種類型，測驗學童分數的整數倍學習成果。分析發現，Greer(1992)的乘法比較與Taber(2002)的比較(compare)、改變(change)的分類相同，都是整數倍的問題。我們從***連結***的觀點考量，認為分數的整數倍最好能延續整數乘法的語意結構分類模式，再將無法擴展的分類予以刪除，或者加上新增的分類。基於上述理由，研究者將分數的整數倍語意結構分為等組、比較和矩形面積等三種類型，其中整數笛卡爾積的問題無法再擴展到分數的整數倍問題。

1.等組型：每組內的數量一樣多，求出總量的語意結構。例如：一個盤子裝$\frac{3}{8}$片披薩，3 個盤子可以裝多少片披薩？

2.比較型：比較兩量的語意問題。例如：英華吃了$\frac{3}{8}$個披薩，力凱吃的披薩是英華的 3 倍，問力凱吃了多少個披薩？

3.面積型：在連續量、二維的情境，已知一圖形的邊長，求面積的語意結構。例如：一個長方形的長是 3 公尺，寬是$\frac{3}{8}$公尺，問這個長方形的面積是多少？

有關整數乘以分數的解題性知識方面，羅素貞(2002)對屏東縣三所國小各一班四、五年級學童的研究發現，學童對等組語意的問題：一袋柳丁有 8 顆，壓一杯柳丁汁需要$\frac{3}{8}$袋柳丁，壓 16 杯柳丁汁需要幾袋柳丁？四年級學童的答對率為 35％，五年級學童的答對率為 71％。Taber(2002)對五年級學童進行語意結構的教學實驗，發現分數乘以分數應用題，學童有 82％以上的答對率。

(三)程序性知識

程序性知識的教學與評量也是重要的一環。我國九年一貫數學領域的編輯委員(教育部，2003)認為數學運算或計算並不只是機械式計算操作而已。所謂能熟練數學的運算或計算，係指在能夠理解數學概念或演算規則的情況下，所進行的純熟操作。這種透過理解並能將觀念與計算結合的能力，才是演算能力。某類型數學問題演算的純熟，常能同時促使新舊數學觀念的連結與落實。演算

亦是學童獲得新數學經驗的方法，新的經驗將會再形成學童下一階段新主題學習所需的具體經驗。

楊壬孝(1989)對國中小學童學童進行分數概念的研究，發現帶分數的整數倍計算題型($1\frac{1}{4}\times7$)，五年級學童(包括北市、台北地區、台灣省)平均答對率是 23％。

四、小結

現今的教育除了重視數學知識的學習之外，也強調數學能力和數學威力的培養，也就說是希望學童能運用概念性知識和程序性知識來解題之外，也強調學童在能運用數學進行推理、溝通並進行與生活、數學內和數學外的連結。

文獻探討發現，分數的整數倍概念性知識和解題性知識的學習，可以經由相關概念的連結來達成，例如單位分數的內容物問題、分數的情境結構、概念溝通的表徵、乘法的語意結構等相當清楚。我們也認爲學童在連結相關概念的同時也慢慢的在培養他的推理與溝通能力。但我們並未發現文獻中有結合相關概念的研究，因此，本研究欲研擬一套教案進行教學實驗，並對實驗結果提出適當的建議。

肆、研究方法和過程

本研究採實驗研究法。教學實驗之後，有前測、後測和延後測的研究過程。本教學實驗是以筆者任教的五年級爲對象，學童人數爲 29 人。本教學實驗的教

學時數爲二節。

在進行教學實驗之前，我們先進行國內外相關文獻的探討，然後開始設計教學活動以及測驗試卷。在實施教學前先進行前測。分數的整數倍教材在教學完畢之後的隔週，進行後測。再經過五週之後進行延後測。在進行教學實驗時，每節課都進行錄影，以利教學研究時進行分析之用。

本研究設計一份試卷，試卷的設計參酌了現今文獻中的研究重點，主要是分數的整數倍運算及在不同的問題情境中，學童是否可以依題意正確列式和解題，試卷包含了概念性知識、程序性知識、解題性知識的問題，同時試卷是由數學教育專家與實務教師共同設計，因此試卷具有內容效度與專家效度。

本研究的試卷在三次施測之後，經過折半信度檢驗發現相關係數 Alpha＝.7970，因此我們可以說本研究的試題分析結果具有可信度。

一、教學實驗設計理念與流程

本研究對文獻進行探討後所設計的教學實驗的理念如下：

(一) 教學實驗設計理念

1. 重視數學威力和數學能力的培養

美國 NAEP(NAGB, 2002)認爲數學威力是*學童有全面性的能力能結合和使用數學知識去進行探究、臆測、邏輯推理、解決非例行性的問題；能進行數學*

*的溝通；以及能在數學脈絡之內，或其他的學科脈絡進行連結；*這在我國九年一貫數學領域課程暫行綱要和課程綱要(教育部，2000，2003)中也可以看到。本研究同樣認為學童的推理、溝通、連結力的培養能力是現今社會一種重要的能力，所以不是只在數學課中進行，而是要能與學童的生活經驗及其他領域相結合；因此連結整數乘法語意結構的舊經驗，來進行分數的整數倍語意結構教材的學習；在教學方法上以共同討論的溝通方式進行，形成互動的課室氣氛；以多元

變化的應用題題型培養學童推理的能力。

美國 NAEP(NAGB, 2002)認為數學能力可以看成學童在特定的數學知識內展現他的數學能力。數學能力指的是概念性了解(Conceptual Understanding)、程序性知識(Procedural Knowledge)和解題(Problem Solving)三個因子。我國大學入學考試中心(林福來，1994)在進行學童試題分析時也採用此一數學能力做為分析的向度。本研究同樣認為學童的數學能力的培養不是短暫時間內可以達成，它需要持久的進行。同時，最好也能在班級的數學教學過程中持續進行，而不是在課後藉大量的練習題熟練數學相關知識和數學能力的培養。因此，我們將探求一

種可以在數學課室中培養學童數學能力的教學脈絡。

研究者在教學中以*面積切割或線段的圖像來表徵*分數的整數倍概念性知

識，讓學童察覺分數的整數倍算則，再進一步解決分數的整數倍應用問題。在教學中除了概念性知識的學習之外，我們也設計一些計算問題和例行性問題要求學童利用課餘時間練習，以豐富學童分數的整數倍程序性知識。無論是九年一貫能力標或是 NCTM 的 standards 都強調學童解題能力的培養，爲了培養學童能真正了解題意進行解題，及避免學童察覺本單元是分數的整數倍問題，便把每一題應用題都用乘法進行解題的假性認知，我們在教學及施測過程中也都放

入

其他(加、減、除)運算的應用題。

2. 教學布題的多元性

在分數教材應用題的布題中，我們參考國內外整數乘法的語意結構，延續學童原有學得的整數乘法結構，分爲等組、比較、面積三種類型；在分數概念教學方面，重視分數情境結構的變化，布題情境包含一維連續量、二維連續量、離散量。然而，因爲教學時數的限制，在教學活動的布題無法將所有的題型納入；爲了使學童熟悉分數教材的各種題型，我們在設計總結性評量的測驗題時，就可以將分數的情境結構和分數的整數倍語意結構的概念做組合和分配納入評量內容，使測驗題目因結構的差異而產生不同題型的問題，這樣學童對分數的素材才能得到完整的學習。

一個學童或許比較容易判斷一個整數型的問題何時需要用那一種運算，但

是對分數的四則運算，就比較不容易理解。同時爲了培養學童能真正了解題意進行解題，及避免學童察覺本單元是分數的整數倍問題，便把每一題應用題都用乘法進行解題的假性認知，我們在教學及施測過程中也都放入其他(加、減、除)運算的應用題。

3. 培養溝通能力 -- 民主開放的課室討論文化

在民主開放的課室討論文化中，教師會鼓勵學童表達其對概念性知識、解題性知識的理解。從學童的口頭表達過程中，我們可以得知學童的思考脈絡，從學童的圖形表徵中可以了解學童是否真正理解概念。所以，在教學實驗中的解題活動中，教師並不處於主導的地位，而是以較開放的方式，讓學童發表自己的想法或解題方法，教師適時引導歸納；在此過程中，同儕可以互相欣賞不同的解題方法，對於學童的發表能力也有很大的助益。

討論是一種合作學習，在師生與學童同儕互動中，可以促進學童的思考、藉由討論的過程中激發學童不同的解題、透過質疑辨正的過程中釐清迷思概念，對學童的概念學習有極大助益。因此筆者在數學教學過程中，引導學童共同討論或做分組討論、發表，鼓勵學童表達其對概念性知識、解題性知識的理解。從學童的表達過程中，我們可以得知學童的圖形表徵不一定和教師的表徵相同，在本研究測驗的後測和延後測中，亦發現學童多樣的圖像表徵，均能呈現分數的整數倍概念。

4. 融合評量理念的教學

在教學時為了隨時掌握學生的學習狀況，我們認為應在教學過程中，融入安置性評量的理念檢驗學童是否具備學生習概念的舊經驗。運用形成性評量，評量學童在學習過程中可能的學習問題，適時調整老師的教學；也可以運用診斷教學的技巧，適時釐清學童的迷思概念。最後再運用總結性評量了解學生的學習成效。

(二) 教學流程

學童在學習分數的整數倍教材前，須具備分數的概念和「倍」的概念。本單元設計兩節課的教學，首先以分數的連加法引入，讓學童用乘號列式，以單位分數概念處理分數的整數倍概念。第 2 節進入假分數的整數倍，最後再進行帶分數的整數倍，並變化布題的情境，使學童得到完整的乘法概念；在教學過程

中都輔以圖形表徵，來協助學童對分數的整數倍概念理解。

本教學實驗是進行 2 節課的分數整數倍教學活動，在第一節課進行真分數的整數倍，首先布題「作 1 朵緞帶花需要 $\frac{1}{4}$ 公尺，做 3 朵緞帶花需要多少公尺的緞帶？」以學童熟悉的分數的連加法 $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ 引入，畫出線段圖，再讓學童用乘號列式，將分數的整數倍連結到整數的倍數概念來解題，以單位分數概念處理分數的整數倍概念，再布題真分數的整數倍問題：「姊姊有 $\frac{3}{5}$ 包色紙，已知妹妹的色紙是

姊姊的 4 倍，問妹妹有幾包色紙？」教師在行間巡視時，發現有學童將乘法做成擴分的情況，及時做診斷教學，並鼓勵學童畫圖解題以協助了解分數的整數倍概念。第一節課的分數的整數倍布題還包面積類型的題目，是要學童算出平行四邊形的面積，題目以圖形呈現，在平行四邊形的四個邊長和高，標示出長度，

以複習平行四邊形「高」的概念。

第二節課先進入假分數的整數倍教學，我們刻意將布題的數字放大，所以不再鼓勵學童畫圖，目的是在學童能夠以乘號列式，並運用約分將解題過程中的乘積變小；再來進行帶分數的整數倍題，由於帶分數的整數倍計算可以有不同的解題過程，在共同討論中讓學童學習至少 2 種的解題方法，並討論如何選擇運用。例如當帶分數的分母不大時，可將帶分數化為假分數相乘，例如：$2\frac{1}{2}\times 3＝\frac{5}{2}\times 3＝7\frac{1}{2}$，但帶分數的分母較大時則適合用分配律處理，例如：$9\frac{31}{55}\times 5＝(9＋\frac{31}{55})\times 5＝(9\times 5)＋(\frac{31}{55}\times 5)＝45＋\frac{31}{11}＝45＋2\frac{9}{11}＝47\frac{9}{11}$。另外，我們認為對數學知識、數學概念的理解不是只有新學的材料而已，還要能將以往所學的、以及生活經驗相連結，所以也把周長的概念納入布題，「爸爸的名片長是 9 公分，寬是 $5\frac{2}{5}$ 公分，問爸爸的名片周長是多少公分？」邊長以分數呈現，將長方形的周長概念與分數的整數倍概念結合，來複習周長的算法，希望學童所學能更深更廣。

伍、研究結果與討論

本研究的前測試題、後測試題、延後測的試題均以同一份試卷檢測；前測的目的主要在檢驗學童的分數概念是否完整？是否已經具備學習分數乘法的準備。後測是在檢驗學習本單元之後是否達到預期的學習成效，而延後測的實施則是在檢驗學童在教學實驗一個半月之後是否仍具備學習保留的現象。

在試題的設計上，檢驗學童有關分數單位的概念、分數的加減、分數的整數倍問題。試題共計 18 題：計算題有 9 題，包含同分母分數加減 1 題，異分母分數的加減 3 題、整數減帶分數 1 題，真分數的整數倍 2 題，帶分數的整數倍 2 題；作圖題 2 題，其中 1 題包含 2 小題(附有圖形)的填充，另 1 題是分數的整數倍表徵題；應用題共有 6 題，包含離散量、連續量、一維、二維的布題情境，和語意結構不同的整數倍問題。

從三次測驗的整體答對率來分析，前測的平均答對率是 58%，後測的平均答對率是 79%，延後測是 84%，見表二；其中前測和後測的整體答對率，達到顯著性差異；前測和延後測亦達顯著性差異。

表二　前測、後測與延後測試題的 T 檢定

試題	平均答對率			T 檢定		
	前測	後測	延後測	前測、後測	後測、延後	前測、延後

計算題	62%	81%	92%	-3.643*	-3.093*	-6.003**
表徵題	26%	72%	71%	-3.013*	1.015	-2.013*
應用題	60%	80%	83%	-3.233*	-.661	-3.743**
總和	58%	79%	84%	-4.199**	-1.470	-5.415**

一、計算題—程序性知識

屬於程序性知識的計算題，在測驗中也設計分數加減計算題，來檢測學童的分數加減的概念、程序是否會和分數的整數倍概念和程序混淆。

計算題的前測平均答對率為 62%，後測為 81%，延後測為 92%，後測比前測答對率提高 19%，達到顯著性差異。延後測比後測的答對率提升 11%，達到顯著

性差異。同時，延後測比前測答對率提高 31%，也達到顯著性差異。

比較個別試題的答對率，發現有顯著性差異的題目，主要集中在分數的整數倍試題上。在前測和後測具顯著性差異的為【計算 2】、【計算 5】、【計算 6】、【計算 8】、【計算 9】；在後測和延後測中，達到顯著性差異的是【計算 3】、【計算 8】、【計算 9】，在前測和延後測的比較中，【計算 2】、【計算 4】、【計算 5】、【計算 6】、【計算 7】、【計算 8】、【計算 9】，達到顯著性差異。

本研究在計算題中，以分數的整數倍程序性知識研究為主，所以針對分數的整數倍計算題 6、7、8、9 作試題分析，見表三。

表三　前測與後測具顯著性差異的分數整數倍計算試題

試題	答對率			顯著性雙尾		
	前測	後測	延後測	前、後	後、延後	前、延後
【計算 6】$\frac{4}{39}$ × 3	71%	100%	96%	-3.346**	1.018	-2.660*
【計算 7】$\frac{7}{10}$ × 12	82%	93%	100%	-1.256	-1.415	-2.423*
【計算 8】$7\frac{2}{5}$ × 4	61%	79%	100%	-2.393*	-2.655*	-5.196**
【計算 9】$50\frac{13}{75}$ × 11	36%	69%	93%	-2.618*	-2.355*	-5.458**

我們發現：即使在未經教學的前測中，學童在【計算 6】$\frac{4}{39}\times 3$、【計算 7】$\frac{7}{10}$×12 的真分數整數倍的計算題答對率仍相當高，分別為 71%與 82%。在後測和延後測中此二題的答對率更高達 93%--100%，可見真分數的整數倍問題是學童易於運算的。但我們也注意到在前測中，有 14%的學童將真分數的整數倍計算做成擴分：【計算 6】$\frac{4}{39}\times 3=\frac{4*3}{39*3}=\frac{12}{107}$，這說明少數學童將擴分與倍數的

概

念混淆，以為$\frac{4}{39}$的 3 倍就是分母與分子各乘以 3。

在【計算 8】$7\frac{2}{5}\times 4$ 的帶分數的整數倍計算題，前測的答對率是 61%，在

39

%學童錯誤的解題過程中，發現學童的概念性錯誤有兩種類型：

類一：$7\frac{2}{5}\ \times 4=28\frac{8}{20}$，此類錯誤型態是將帶分數的分數部分，以擴分方式處理。整數 7 的 4 倍是 28；分數部分$\frac{2}{5}$的 4 倍，做成分母和分子各乘以 4 倍。

此類型

占全班人數的 11％。

類二：$7\frac{2}{5}\times 4=\frac{8}{5}=1\frac{3}{5}$，這類型的迷思概念是不了解帶分數的意義，未能將帶分數視爲是一個整數和一個分數的和。將 $7\frac{2}{5}\times 4$ 算成 $7\frac{2}{5}\times 4=\frac{8}{5}=1\frac{3}{5}$，只做分數部分的乘法計算($\frac{2}{5}*4=\frac{8}{5}$)，忽略整數部分的 7 也要乘以 4。此類型占全班人數的 21％。

另外，學童在【計算 8】亦有程序性錯誤的情況，如因數字大而出現乘錯、或化簡錯誤，或在解題過程因未約分而使相乘的數字變大，導致計算錯誤；顯示學童不熟練約分的技巧。

經過分數的整數倍單元的教學實驗之後，學童已能釐清帶分數的意義和分數整數倍的概念，使得【計算 8】後測的答對率提高至 79％，且主要是使用分配律解題(約佔其中的八成)。學童錯誤的類型大都爲程序性的計算錯誤，其中又以假分數化簡爲帶分數的比率最高。而出現上述分子和分母都乘以整數倍的概

念

性錯誤情況只有 3％。

在【計算 9】在 $50\frac{13}{75}\times 11$ 的前測答對率只有 36％。在後測中本題答對率提高至 69％，延後測答對率有 93％，值得注意的是學童在後測和延後測中都使用分配律計算，沒有人使用將帶分數化成假分數再相乘的做法；而錯誤類型只有程序性的計算錯誤；由此可知，學童已經學會在分數數字大的乘法計算時使

用分

配律。

總結學童對分數的整數倍問題的計算能力，發現教學實驗之後，學童對數字較大的帶分數整數倍問題，後測答對率最差也有七成。計算題主要的錯誤是整數加減法的計算問題，而非分數概念的迷思。但無論如何學童的總體程序性知識答對率達八成以上。

二、應用題—解題性知識

本試卷應用題共有 6 題，布題情境力求符合學童生活經驗。解題的方式上，要求學童先列式再算出答案。在問題情境結構、語意結構上，力求多元，以配對方式變化題目。也爲了使學童不固著本單元是乘法的前提下，遇到應用題都以乘法解題，本試卷也安排分數的加減法，和整數的除法問題，期待學童能在真正理解題意之下解題。因此，我們把應用題歸類在評量學童的解題性知識。

由表二得知，應用題的前測答對率只有 60％，後測則大幅提高至 80％，延後測的答對率爲 83％，後測與前測以及延後測與前測皆達到顯著性差異。研究發現，學童在後測與延後測的答對率達八成以上，顯示五年級學童在分數的整

數

倍解題性知識已達暫行綱要的目標。

比較個別試題的答對率(參見表五)，有顯著性差異的題目主要集中在分數的

整數倍問題上。在前測和後測達到顯著性差異的應用題有 3 題，分別是【應用題 4】、【應用題 5】、【應用題 6】，這三題是類型不同的乘法題。我們也發現在後測中，應用題答對率接近 80%或超過 80%的題目類型都是分數的整數倍問題。後測和延後測的平均答對率相近，具和前測達顯著性差異的只有一題，即【應用題 3】，題型是整數除法的概數問題，答對率由後測的 66%大幅提昇至延後測的 93%；探究學童答對率提高的原因是後測到延後測中的一個半月間，學校學

行第二次定期考查，在此期間學童有較多的複習所致。

表四　具顯著性差異的應用題試題

試題	答對率			顯著性雙尾		
	前測	後測	延後測	前、後	後、延後	前、延後
【應用 3】玩具工廠生產小汽車 3545 輛，現要包裝至大賣場販賣，每 100 輛小汽車裝成一箱，全部的小汽車都要裝完，需要幾個箱子？	57%	66%	93%	-.640	-2.639**	-3.326*
【應用 4】茶葉 1 包重 $\frac{9}{16}$ 公斤，5 包茶葉是多少公斤？	68%	90%	93%	-2.057*	-.420	*-2.436
【應用 5】紅色彩帶長 $2\frac{1}{3}$ 公尺，紫色彩帶是紅色彩帶的 3 倍，問兩條緞帶共長多少公尺？	43%	90%	75%	-4.240**	1.456	-2.540*
【文字 6】一張色紙長 $12\frac{9}{10}$ 公尺，寬 9 公分，問這張色紙的周長是多少公分？	46%	79%	75%	-2.688**	-.381	-2.248*

分析學童的錯誤類型發現，【文字 6】是長方形的周長概念問題，多數的學

童算成面積，可見學童容易將面積與周長的概念混淆。因此，建議在分數的整數倍教學時，教師應將此類型題納入，一方面可以熟練分數的整數倍演算，另方面可將面積和周長概念作複習。我們認為在進行數學教學時，教師應該將新概念與舊概念連結，讓學童在新舊教材中強化數學知識與概念，以提高數學的解題能力。

三、表徵題—概念性知識

本研究在無法一一訪談學童來了解學童的學習成效下，希望學童以圖形或文字呈現對分數的整數倍概念的了解。

前測【作圖題 2】的答對率是 25%，這是由於學童在數學的解題中少有作圖經驗，以文字說明數學概念的機會也少；所以，前測的答對率極低。經過教學實驗之後，學童學習了以作圖方式呈現概念來解題，所以後測的答對率較前測的答對率大幅提高，由 25%提高至 72%，達到顯著性差異，顯示表徵教學在協助學童理解數學的概念上，確實達到學習成效。延後測答對率為 71%，與後測相近，顯示教師的表徵教學在學童學習一段時間之後，仍然具有學習保留成效。

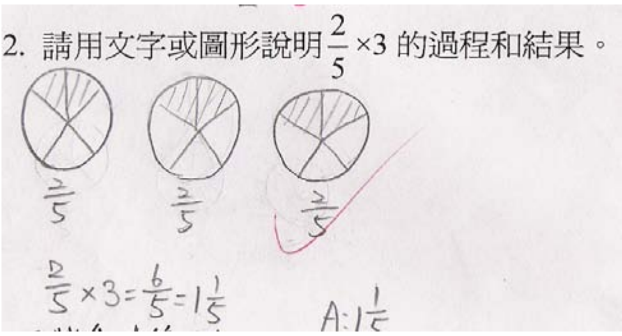
表五　表徵題試題分析

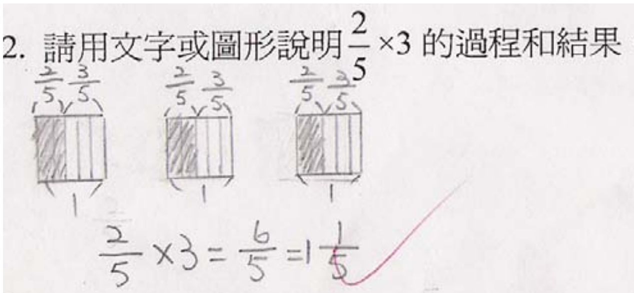
試題	答對率			顯著性雙尾		
	前測	後測	延後測	前、後	後、延後	前、延後
【作圖 2】請用文字或圖形說明 $\frac{2}{5}\times 3$ 的過程和結果？	25%	72%	71%	-3.994**	.081	-3.855**

研究發現，大部分學童在前測時作圖不完備，文字說明也只是說明算式解題的程序性過程(例如分子乘以3)，未能作分數的整數倍概念性的說明；顯示出學童少有以表徵方式呈現數學概念的經驗。

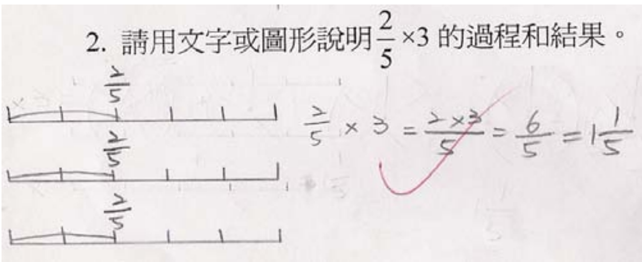
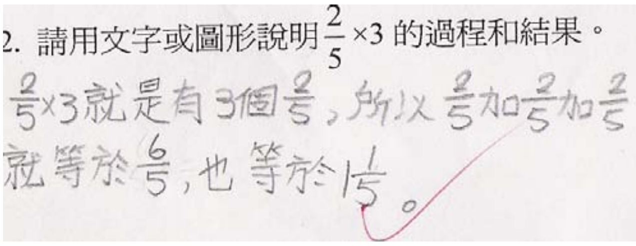
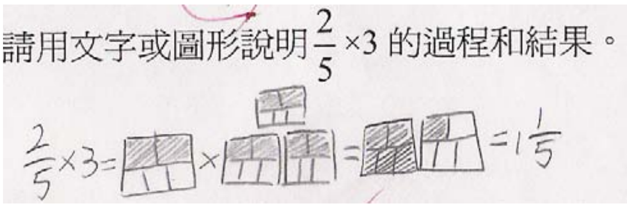
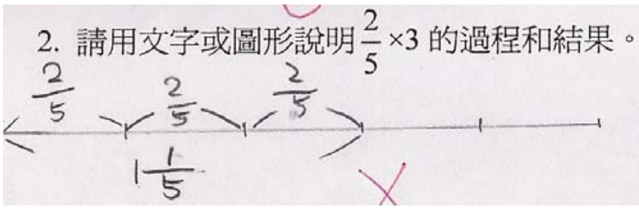
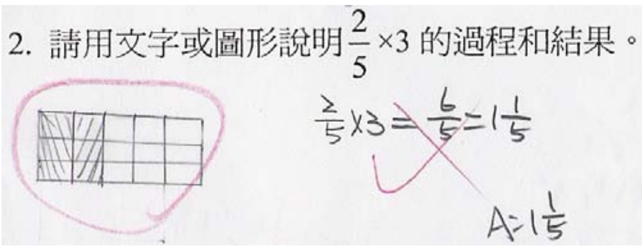
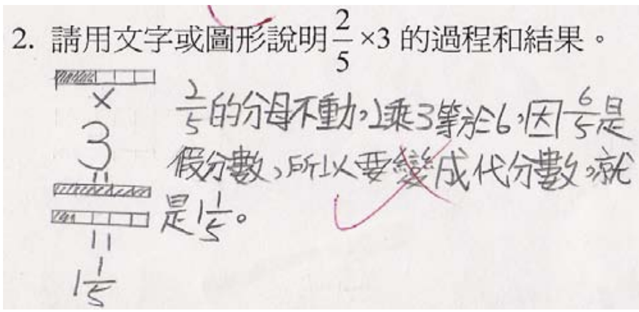
再從學童的後測和延後測中，本題的表徵方式來分析學童呈現的分數的整數倍概念，發現兩次測驗中有70%左右的學童能夠呈現正確的表徵，了解$\frac{2}{5}\times3$就是3個$\frac{2}{5}$，或是$\frac{2}{5}\times3$就是$\frac{2}{5}$的3倍，且學童的表徵形式呈現多樣化(見圖七至圖十)，有用圓形表徵、矩形表徵、線段表徵和文字符號表徵。另外，也有30%左右的學童呈現錯誤的表徵(見圖十一至圖十四)，主要在明顯未將面積平分成5份

或沒有單位量、把乘法當成擴分、或者程序性的文字說明。

<table>
<tr>
<td>

1. 圓面積表徵</td>
<td>

2. 矩形面積表徵</td>
</tr>
</table>

 3. 線段表徵	 4. 文字說明
 5. 未能等分割的面積圖示	 6. 沒有單位量的線段圖示
 7. 乘法變成擴分	 8. 程序性說明的文字表徵

Lesh(1987)認同圖形或文字符號表徵是表現學童概念的理想方式。本研究發現，在紙筆評量的測驗中，學童習慣用圖像表徵表達他們對概念的了解，且學

童在以前沒有這樣的評量經驗下，答對率高達七成。因此，本研究相信，假如學童習慣於此類的表達方式，他們將更能運用圖形表徵和他人溝通數學的概念性理解，將更能運用圖形表徵進行概念性的推理，使他們的數學更有威力。

肆、結論與建議

一、結論

本分數的整數倍教學實驗以分數概念的情境結構和乘法的語意結構布題，以解決問題爲導向，輔以圖像表徵和討論方式進行教學，協助學童培養理解分數的整數倍概念，培養學童連結先前概念，進行數學推理和溝通的數學威力。

從實驗結果發現，學童在前測和後測的計算題、表徵題、應用題三種題型，均達到顯著性差異；前測和延後測的計算題、表徵題、應用題三種題型亦全部達到顯著性差異。同時，在後測和延後測的計算題和應用題的答對率也達到八成以上。表徵題在後測和延後測中的答對率雖僅達七成，但較前測 25%的答對率高出許多，顯示本教學實驗有不錯的學習成效。

作圖題的概念性知識，是較少在一般的紙筆測驗中呈現的。假如我們想要在紙筆評量過程中了解學童對分數的整數倍概念的溝通能力，則運用彼此有共識的圖像表徵是一種可行的方式；因爲有共識的圖形表徵對學童在概念的表達上，比利用文字描述的方式容易表達，且節省時間。

在表現程序性知識的計算問題上，學童對於分數整數倍的計算程序性知識的理解較爲容易，在數字較小的分數的整數倍計算中均能達到八成以上的答對率，但對於分母數字較大的分數的整數倍答對率則爲七成左右，可見數字較大的題目必須多做練習。其實，分數教材的四則運算需要常常複習才能熟練，所以在評量中也應加入分數(包含異分母)的加減運算。

在表現解題性知識的應用題中，我們以分數四則的布題檢測學童對分數的情境結構，和分數的整數倍語意結構是否能夠清楚判斷，進而作出正確的解題。重視多元布題的教學理念，可以培養學童面對問題時有較爲敏銳的解讀能力，進而提升學童解決問題的能力，這在教學實驗後的測驗中呈現較高的答對率可以佐證。

二、建議

經由教學實驗以及測驗結果的分析，本研究從分數的整數倍教學素材、教學活動、評量、教學時機等項目提出下列的建議：

(一)教學素材

在九年一貫數學學習領域課程綱要的觀點下，分數的整數倍程序性知識的理解並不難，此觀點與本研究測驗的結果相符：學童在後測和延後測中的真分數整數倍的答對率可以達到 80％。

但從過去的研究文獻和本教學實驗的研究結果都發現，分數四則的語意結

構有較多的變化，如果沒有納入教學的布題中，學童不容易解讀題意；所以，教學時應該將乘法的各種語意結構的題型納入布題的設計，讓學童有足夠的解題經驗，建立學童穩固的分數的整數倍概念的語意結構。此外，分數的整數倍解題性素材方面，我們建議應變化分數概念的情境結構(例如：一維情境、二維情境、連續量、離散量的情境)，分數的整數倍語意結構(例如：等組、倍數、比較、面積等語意結構)，多餘資訊問題，以及非乘法情境問題，使學童有豐富的學習脈絡，使學童對分數的數感日益豐碩。

(二)教學活動

在真(假)分數的整數倍概念教學上，我們可以把乘法概念建基在加法概念之上；也就是運用累加概念進行同分母真(假)分數的加法，讓學童了解真(假)分數的整數倍就是分子乘以乘數。當然，我們也可以退回到起始概念進行教學；也就是說利用倍數就是幾個相同的分數相加，同時利用同分母真(假)分數的加法概念或表徵進行教學。

帶分數的整數倍概念可以利用分配律的概念進行教學，亦即整數部份的整數倍，再加上分數部份的整數倍的概念進行教學；也可以把帶分數化成假分數，再利用假分數的整數倍概念進行教學。

我們建議老師在教學前先評量學童的先備知識，例如先評量學童是否了解同分母分數的加法概念。當學童已具備同分母加法概念之後，即可進行整數倍

是分數累加的概念教學，不必回到更下層的加法概念教學。當然，老師對於第一個分數的整數倍概念教學時，探究學童是否能將分數的整數倍就是分數的累加概念，以及同分母加法概念相結合，以進行分數的整數倍概念學習，也是一種不錯的教學方式。

我國課程暫行綱要的編輯學者們(教育部，2000)認爲分數概念的學習，實物情境與具體操作適合低年級學童，當學童進入高年級以後已經可以經由圖像表徵進行學習。本教學實驗測驗的結果，前後測達到顯著性差異，顯示在教學過程中圖像表徵確實可以協助學童對概念的理解，因此建議教師在教學活動中運用圖像表徵。

(三)教學評量

我們的教學與研究經驗告訴我們，部份學童在進行評量時會去猜測老師可能的布題方向；因此，我們建議在進行評量時，避免所有的應用題都是乘法問題，也要加入加、減、除的題型，甚至多餘資訊的問題，以培養學童能夠真正了解題意後再進行解題。在計算題方面也是如此，測驗題型除了分數的整數倍之外，也要加入分數的加減運算，讓學童再次有複習分數四則運算的機會。

在教學時除了運用圖像表徵，透過共同討論的方式進行教學之外，一方面也要運用各種評量方式了解學童的學習狀況，例如在教學過程中，運用形成性評量，評量學童在學習過程中可能的學習問題，適時調整老師的教學；也可以運用診

斷教學的技巧，適時釐清學童的迷思概念。

對於紙筆評量，它是大量探究學童各個概念學習成效的可行方式。我們建議評量時要同時重視概念性知識、程序性知識、和解題性知識，且各個知識的題型盡可能多樣化且和上述的分數乘法教學素材配合。對於分數乘法的概念性知識的理解，則建議運用表徵題來探究學童對分數概念的理解；畢竟圖形表徵也是一種良好的溝通工具，是學童較易表達其概念的方式，所以教師的評量內容應該包含概念性知識、程序性知識、和解題性知識的各種題型。

(四)教學時機

分析八二年版課程標準，分數的整數倍教材安排於五年級進行教學；九年一貫課程數學學習領域暫行綱要，則是安排於第二階段中(N-2-6)進行教學；九年一貫課程數學學習領域綱要和美國加州則是明白劃分於四年級進行(N-2-07，4-n-07)施教。由於分數的整數倍概念對五年級學童沒有困難，我們認爲應再對四年級學童進行相關的教學實驗，以了解他們的學習成效，再提出較恰當的教學時機建議。

參考文獻

民生報(2003)：國中小數學難度要加深。民生報，2003 年 02 月 23 日。

林彥宏(2002)：**國小五年級學童分數概念的補救與診斷**。臺南師範學院教師在

職進修數學碩士論文。

林福來(1994)：**八十三年度基礎科目數學科試題研發工作計劃**。台北市：大學入學考試中心。

張春興(1989)：**張氏心理學辭典**。台北市：東華書局。

教育部(2000)：**國民中小學九年一貫數學學習領域課程暫行綱要**。台北市：教育部。

教育部(2003)：**國民中小學九年一貫數學學習領域課程綱要**。台北市：教育部。

陳晚蓁、楊德清(2002)：創意的教學～分數的補救教學。**科學教育研究與發展季刊**，**29**，33-50。

黃芳玉(2002)：**國小學童分數乘除應用題表徵轉換能力與後設認知之研究**。臺中師範學院教育測驗統計研究所碩士。

楊壬孝(1989)：國中小學童分數概念的發展。**行政院國家科學委員會專題研究計劃成果報告**(編號：NSC-78-0111-S-003-06A)。執行單位：國立台灣師範大學數學系。

劉世能(2001)：**臺灣北部地區國小高年級學童分數概念之研究**。國立台北師範學院數理教育研究所碩士論文。

蔣治邦(1994)：由表徵觀點探討新教材數與計算活動的設計。**國民小學數學科新課程概說─低年級**。台北：台灣省國民教師研習會。

謝堅、蔣治邦和吳淑娟(2002)：**國小數學教材分析 － 整數的數量關係**。台北：國立教育研究院籌備處。

羅素貞(2002)：**國小學童分數的整數倍問題之解題研究**。國立政治大學教育學系博士論文。

1.Behr, M.J.; Harel, G.; Post. T.; & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and,proportion. In Douglas A. Grouws(ed.) (1992). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.296-333). Macmillan publishing company, New York.

2.Bruner,J.S.(1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge, MA:Harvard University.

Burns, M. (1999):*Building Understanding of Multiplication of Fraction.*ED430794.

3.California Department of Education(2000). *Mathematics Framework for California Public Schools --Kindergarten Through Grade Twelve.* 2000 Revised Edition.California Department of Education.

4.Dufour-Janvier, B.; Bednarz, N.; & Belanger, M. (1987) .Pedagogical considerations concerning the problem of representations . In C. Janvier(Ed.),*Problems of representation in the teaching and learning of* *mathematics* (pp.109-122). Hillsdale , NJ :Lawrence Erlbaum Associates.

5.Greeno, J.G. (1987). Instructional representations based on research aboutunderstanding. In A.H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education* .

Hillsdale .

6.Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D.A. Grouws(ed.) (1992). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.276-295), National Council of Teachers of Mathematics, Macmillan Publishing Company, New York.

7.Kaput, J.J. (1987). Representation systems and mathematics. In C. Janvier (Ed.).*Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp.19-26). Hillsdale, NJ: Erbium.

8.Lesh, R.(1987). Representations and Translations among

Representations in Mathematics Learning and Problem

9.Lesh, R.; Post, T.; & Behr, M. (1987). Representation and translation Among representation in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problem of representation in teaching and learning of mathematics* (pp.33-40). Hillsdale,NJ:Erlbaum.

10.Mack,N.K.(2000):*Long-Term Effects of Building on Informal Knowledge in a Complex Content Domain*:The Case of Multiplication of Fraction. ED442671.

11.National Assessment Governing Board(2002). *Mathematics framework for the 2003 national assessment of educational progress.* National Assessment Governing Board U.S. Department of Education

12.National Council of Teachers of Mathematics(2000).*Principal and Standards for school mathematics*. Reston:VA:NCTM.

13.Sharp, J.(1998). A Constructed algorithm for thye division of fractions. In Morrow,L.J., & Keenney, M. J. (ed.) *The teaching and learning of algorithms in school mathematics.* 1998 Yearbook. National Council of Teachers of Mathematics, Inc., Reston, VA. 198-203.

14.Sharp, J. & Adams, B.(2002). Children's constructions of knowledge for fraction division after solving realistic problems. *The Journal of Educational Research; 95*(6), 333-347.

15.Taber, S.B. (2001):*Making Connections Among Different Representations:The Case of Multiplication of Fraction*. ED454053.

Teaching Experiment of Integer Times of Fraction

Huei-Feng Hu[1] Yuan-Shun Lee[2]

[1]Taipei Mandarin Experimental Elementary School

[2]Department of Mathematics and Computer Science Education,
Taipei Municipal University of Education

Abstract

From literature review, we suggest that the learning of mathematics ability and mathematics power of integer times of fraction can be help by using representation of conceptual communication, situation structure of fraction conception, and semantic structure of whole number multiplication to design teaching materials. Experimental designs for research, research samples are 29 of grade five. Research data include teaching observation and tests, validity of teaching observation and tests are using expert validity and contents validity, reliability of tests is using split-half reliability, and teaching observation is using triangulation. After teaching experiment, we suggest that the teaching

materials of integer times of fraction can use our design to help students to connect, to reason and to communicate with relational concepts, to nurture conception understanding, procedure knowledge, and problem solving of students. The teaching action should thought students learning characteristic using multiple teaching methods for cooperation solving, self solving, and communication with schoolmates. The assessment of teaching should use placement assessment, diagnostic assessment, formative assessment, and summative assessment to instantaneously understand and help students learning.

Key words: mathematics ability, mathematics power