一位國小六年級學生在
分數基準化問題的解題表現

顏宗斌[1] 劉祥通[2]

[1] 嘉義市世賢國民小學 [2] 國立嘉義大學數學教育研究所

（投稿日期：94 年8 月1 日；修正日期：94 年8 月31 日；接受日期：94 年9 月28 日）

摘要

本研究旨在探討一位國小六年級學生在分數基準化問題的解題表現。研究方法爲個案研究法，採用以工作單爲基礎的訪談蒐集資料，也就是依據學生的工作單解題紀錄進行訪談。工作單問題分爲整數除以分數、同分母分數相除、異分母分數相除三種不同數值型態的題目，每一種類型的題目都有2 題，全部共有6 題。研究個案的數學成就中上，課堂上勇於發表，對於富有挑戰性的數學難題，都表現出積極嘗試的態度。在本研究之前，他尚未學習過與分數除法相關的教材單元。

重要發現如下：個案能將單位分數視爲認知物件，解決分數基準化的上述前二種問題，並做適當的圖形表徵；但在第三種問題(異分母分數基準化問題)，他雖也能解題成功，但對於兩分數之間的基準化關係，並未透過共同測量單位進行圖形表徵。

關鍵字：分數、基準量、基準化、解題

通訊作者：劉祥通 liust@mail.ncyu.edu.tw 05-226-3411 ext 1922

壹、緒論

分數是國小數學課程的核心概念之一，分數概念與除法、小數、比、比值與機率…等國小數學的重要概念息息相關；因此，分數的學習可說是國小數學教育中最有挑戰性的教學主題。

當學童學習的範疇從整數跨入分數領域時，分數本身的多重意義是造成學童學習困難的首要原因（楊壬孝，1989；林碧珍，1990；呂玉琴，1991；劉秋木，1996；洪素敏，2002）。然而，無論是將分數視爲「部分－整體」的關係、兩數量相除的「商」、兩數量的相對關係－「比」、兩數量相對關係的數值化－「比值」、測度（measures）、運算子（operators）亦或是數線上的一點…，最重要的都是在表徵「基準量」與「比較量」兩數量之間的關係。

既然如此，那又該如何探求「基準量」與「比較量」兩數量之間的關係呢？這就牽涉到我們在日常生活中是很常見的「基準化」（norming）的概念。例如當我們想描述旗竿有多高時，我們常會以熟悉的物品高度作爲估測的基準量，若以成人身高爲基準量，旗竿大約是3 個人高；若以樓高爲基準量，旗桿大約是1

1

2 層樓高，這種將「基準量」

視「1 個新單位」，然後以此單位來重新詮釋「比較量」的過程，就是基準化的能力。一般而言，當基準量的數值型態是整數時，學生大多能利用等分物品的經驗，以等分除的觀點完成整數基準化解題，但實際上基準化過程卻必須以包含除的觀點來解釋才合理，所以一旦基準量的數值型態改為分數時，學生不能再用等分除的觀點來解題，往往僅能依賴拼湊算式與記憶規則，無法掌握運算過程中算則所代表的分數基準化意義。例如，多數學生在解

4

5 ÷

3

5 ＝（ ）的問題時，能以「顛倒相乘」的方式解題，迅速

寫出

4

5 ×

5

3 ＝

4

3 ＝1

1

3 ，卻無法說明1

1

3 所代表的倍數意義，亦無法解釋1

1

3 的整

數1 與分數

1

3 的由來，對學生而言，這種「只知其然，卻不知其所以然」的學習是不具

意義的。真正有意義的學習，應該是以學生的既有經驗為基礎，以學生的自發性想法為起點，透過有意義的認知活動，來協助學生理解並建構關於分數基準化的意義。

由於學生對於分數基準化學習的茫然與困難，是教師在教學上亟待突破的困境；亦

因為分數基準化能力是學習更高層次之數學概念必備的基礎能力，同時它也是培養學生抽象思考能力的關鍵。因此，本研究嘗試以整數除以分數、同分母分數相除、異分母分數相除三種不同數值型態的題目，來探討學童在分數基準化問題的解題表現。

貳、文獻探討

爲了達成上述研究目的，本章文獻探討將依單位量的意義、單位化與基準化、以及分數概念的發展三個部分，分別討論如下：

一、單位量的意義

在數概念的發展當中，單位（unit）的概念扮演著重要的角色，而測量的單位與單位量的大小對於理解數的關係和運算都極爲重要。歐基里德（Euclid）曾提出「所謂的『單位』是指存有而被稱爲『一』的事物，而『數』則是由單位所構成的『多數』」（引自甯自強，1997）。這個存有而被稱爲「一」的事物它所代表的量就是「單位量」。

Behr（1992）的研究便特別強調「單位型態」與「集聚單位」的重要性，認爲這是連結整數與有理數的關鍵。兒童在形成分數概念時，必須先形成相當有彈性或變通性的單位概念（劉秋木，1996）。當單一物體被當成一個單位時，此種單位稱爲單項單位（singleton units）；而把數個物體的集合視爲一個單位時，則此種單位稱爲集聚單位（composite units）（Steffe, 1994）。

例如：「我有**5** 顆蘋果」的敘述中，是以「顆」當作單項單位，「1」是單位量，「5」則稱爲單位數，是代表單位量「1」被重複計數的次數；「他有**3** 打鉛筆」的敘述中，是以「打」爲集聚單位，「打」或「12」是單位量，「3」則是單位數。這也就是說，1 顆蘋果的「顆」是一個「1 單位」（one-unit）的單項單位，而1 打鉛筆的內容物有12 枝鉛筆，此時「打」視爲是一個「12 單位」（twelve-unit）的集聚單位。

因此，選擇不同的單位來測量同樣一個量，會得到不一樣的數值，如同上例，1 打鉛筆的內容物有12 枝鉛筆，取出其中的3 枝，以單項單位「枝」而言，其單位數爲3；而這3 枝鉛筆又可視爲是 $\frac{3}{12}$ 打的鉛筆，也就是以集聚單位「打」而言，其值爲 $\frac{3}{12}$ 。

二、單位化與基準化

Lamon（1994）提出了單位化（unitizing）和基準化（norming）的觀點，可以幫助老師分析學生的解題想法。

單位化就是建立逐漸複雜的單位結構歷程，是一種發展更複雜推理的重要機制結構

（Lamon, 1990）。簡單說，單位化能力就是將單位集聚化的能力，例如，一位學生能以10 爲單位，做每10 個一數，也就是把集聚單位「10」單位化了（劉祥通，2004）。同理，如果學童能以 $\frac{2}{5}$ 爲單位，點數出幾個

2

5 ，此時該生也將「

2

5 」單位化了。兒童計數單

位的概念發展是先能以「1」爲單位來進行運思，之後以「非1」的整數，例如3、5…，然後逐漸擴展到十進位數10、100…等單位，再進階到以單位分數，如

1

3 、

1

4 …，以及

非單位分數，如

2

3 、1

3

4 …等單位。

在整數方面，例如學生唱數10 萬、20 萬、…往上累加至100 萬，是將10 萬視爲累加的單位，亦即學生將10 萬單位化，進行單位量的複製與累加；在分數的部分，以

3

4 爲

例，

3

4 具備了二種意義：其一是將

3

4 視爲3 個

1

4 ，也就是將單位分數

1

4 單位化；另

一則是將

3

4 視爲是1 個

3

4 ，即將非單位分數

3

4 單位化，其中後者對於學童理解而言是

較爲困難的，因爲將

3

4 當成一個新的單位，需要經過二次單位化的轉換過程。

基準化是採取一些單位的架構以概念化其他的情境（Lamon, 1994）。具體而言，基準

化的歷程通常是先形成一個集聚單位，而後再以此單位重新詮釋新的數量情境。如同
Freudenthal（1983）所舉的例子：「若將地球的直徑想像成如同1 毫米大小的大頭針針頭，
並以此定義來看待整個太陽系，那麼太陽則變爲直徑10 公分長且與地球相距10 公尺遠
的球體」，這種把地球的假想直徑當成新單位量，藉此來推算其他數量情境的方法，就是
一種「基準化」的過程。
Lamon（1994）也指出，參照單位（reference unit）觀念的建立，與利用參照單位來
重新詮釋（reinterpret）新的數量關係，似乎是發展複雜數學概念的關鍵。這裡所謂的「參
照單位」就是我們所慣稱的「基準量」，而等待被重新詮釋的數量就是我們所慣稱的「比
較量」（何鳳珠，2004）。當我們將基準量視爲「1 個新單位」時，以此新單位來重新詮釋
比較量之後所得到的單位數（即新單位被重複計數的次數），可以運用「比較量 ÷ 基準
量＝比値（單位數）」的方式來求出，此時兩者的比値就代表了重新詮釋後的新數量關係。

基準化能力奠基在相對思考的能力上，對於解比率與比例問題提供了關鍵性的機
制，也提供了以包含除的觀點詮釋除法的意義。

三、分數概念的發展

當兒童能成熟的運用某一運思方式時，才能表示其擁有某一階段的數概念。國內學
者甯自強（1997a；1997b；Ning, 1992）提出以“分數詞”的意涵來建構學生分數概念發
展的模型，在其研究中，他根據學生對於「分數詞」的解釋、相關的運思及運算處理方
式，區隔出分數概念的前身、起始單位分數、加法性分數、巢狀分數以及有理數等五個
分數概念發展階段；本研究對象爲高年級學童，理論上已達加法性分數階段，正進入巢
狀分數階段，部分同學可達有理數階段，因此針對這三個階段的學童在分數分面的思考
特徵進行探討：
(一)加法性分數（additive fractions）
此階段兒童具備「部分－整體」運思能力，對於等分割活動所得的結果，已開始產
生子單位的概念。以
1
3 爲例，學童能理解「
1
3 」的分子「1」是指1 個單位分量，分母「3」
是指由整體所等分而成的三個單位分量，所以分子與分母所對應的是單位分量與單位量
的「部分與全體」關係，因此學童能夠將單位分數
1
3 視爲是可相加的單位，也就是將
1
3 視
爲認知物件（cognitive object），形成可在運思程序中進行心理操作的物件，正確運思

1

3 ＋

1

3 ＝

2

3 ，此時非單位分數

2

3 是兩個單位分數

1

3 相加的結果，因此稱爲加法性分數。

但是此階段兒童的「部分與全體」運思是單向的（directional），也就是說將分數視爲認知物件的能力是不完備的，僅能夠視非單位分數爲單位分數的倍數，卻無法視單位分數爲非單位分數的分數倍。例如：無法將

1

3 看作是

2

3 的

1

2 ，因爲在加法性分數下，

2

3 是

1

3 的倍數（是由2 個

1

3 所組成的），此時

2

3 是一個整體，而

1

3 是它的構成單位，能夠將

1

3

看成是

2

3 的

1

2 意味著能倒轉部分與全體之間的關係，也就是說部分與全體的關係必須是雙向的（bi-directional），而這是加法性分數階段的學童所缺乏的。

(二)巢狀分數（nested fractions）
此階段，兒童具備雙向的「部分－整體」運思能力，能理解分數單位是可再分割及
再複製的單位，透過重複運用「部分－整體」運思，可以將某一分數單位分割成爲數個
等價的低階分數單位，也可以將數個該分數單位集聚成爲另一個高階的分數單位。以三
階單位（
1
35 、
1
7 、1）爲例，學生能理解
1
7 與
1
35 及
1
7 與1 的化聚關係，清楚的掌握
1
35 是
1
7 的一部分，而
1
35 和
1
7 同時也都是全體「1」的一部份。因此能完全掌握三階單位之間
的「部份－整體」關係。
此外，學生可以從等分割活動結果的等值，察覺
2
3 與
4
6 是等值的分數，但無法使
用公共測量單位
1
6 以比較
2
3 與
4
6 。換言之，學生判定
2

3 與
4
6 等値的依據，是因爲
2
3
與
4
6 經歷不同的等分割活動後，它們所代表的內容物都是相同的，而不是以公共測量單
位
1
6 進行測量後，兩者具有相同的測量結果，因此
2
3 與
4
6 並未被視爲有相等的比率
（ratios）
(三)有理數（rational numbers）
此階段，兒童能從分數aScriptAsy的「部分－整體」關係，察覺潛藏的「部分－部分－整體」
的關係，進而探求「部分對部分」的關係。例如：學生能清楚掌握
1
3 所代表的意義是指
整體之中的某一部份佔整體的
1
3 ，進而意識到其他剩餘的部分佔整體的
2
3 ，然後透過這
兩個「部分－整體」的關係，能夠更進一步探求原先的部分
1
3 是剩餘部分
2
3 的
1
2 倍。
同時，學生能夠將分數詞與它所對應的情境背景的量分開來，而獨立探討分數詞之
間的關係；換言之，學生能夠理解分數代表兩數値間的比值關係，充分掌握分數具備「比」
的意義，擁有等比例運思的共變（co-variant）概念。例如，學生不需情境提供線索，就

能以

1

12 作爲公共測量單位，運用單位量轉換的觀點，將2 個

1

3 和4 個

1

6 同時轉換成8 個

1

12 ，以確認

2

3 與

4

6 的等值關係。

參、研究方法

本研究屬於個案研究(case study)，採用以工作單爲基礎的訪談（task-based interview）（Goldin, 2000）進行資料蒐集。研究者先以工作單問題讓個案學生進行解題，然後觀察其初始解題過程與紀錄，作爲訪談依據，然後進行深入的訪談。本章分別從研究對象、研究工具、資料蒐集與分析三個部分進行討論：

一、研究對象

本研究針對一位個性活潑，數學成績中上，口語表達能力順暢，且在解題時能表現
出自發性的個案（小唐），進行探索研究。
研究者在一次教學觀摩的場合，發現一位教師在演示教學時佈一個這樣的問題：「小
明買了一瓶2 公升的汽水，媽媽規定他每天只能喝

1

4 公升，請問他幾天後才能把整瓶汽
水喝完？」。原本該名教師是期待學生運用單位換算方式，將2 公升和

1

4 公升轉換成2000
毫公升和250 毫公升，以求出答案8 天；沒想到當下有學生能類推整數除法的列式，直
接寫出「2÷

1

4 ＝8，答8 天」。
這個解法引起研究者的高度關注，下課後在研究者的追問下，學生小唐將運算過程
完整寫下，同時進行口頭說明，並應研究者要求畫出圖形表徵補充說明（如圖3-1）。
圖3-1 初次發現小唐具備分數基準化能力的解題紀錄
一位國小六年級學生在分數基準化問題的解題表現

訪談過程中，小唐說明算式中「**2** 可以等於

8

4 ，所以可以用

8

4 ÷

1

4 來算**……**」「**8** 代表

8 份

1

4 **……**，**8** 份

1

4 ÷**1** 份

1

4 等於**8** 倍」；而圖形的畫法是「將**2** 公升分成**1** 公升和**1** 公升，

再把1 公升等分成4 份，每一份就是

1

4 公升，兩個4 份合起就是8 份，那每天只能喝1

份就是

1

8 瓶汽水」。研究者從小唐的說明中意外發現，沒學過分數除法的他，竟然擁有單位分數對於整數的基準化能力，這引起研究者進一步探究的興趣，因此決定以小唐作爲本研究的對象。

參與本研究的個案一小唐，就讀嘉義市某國小六年級。小唐的個性活潑，課堂上勇於發言，富有挑戰、研究的精神，對於科學問題的探討或數學難題的挑戰，都表現出積極參與、努力嘗試的態度。他在五年級及六年級上學期的總體學習成績大約保持在班上的前10 名，但是數學學習成績則介於班上5～20 名之間，起伏頗大。小唐能將除法問題的商以分數及小數的型態表示，在數學領域課程中學習過等值分數、異分母分數的加減、比和比値的單元，也曾在社會領域課程中學習過比例尺與縮圖的概念，除此之外，個案尚未學習過與分數除法相關的教材單元。

二、研究工具

本研究採用以工作單爲基礎的訪談進行資料蒐集，因此研究者與工作單扮演著重要的關鍵，以下就研究者與工作單分別敘述之：

(一)研究者

研究者在研究的過程中扮演著觀察與訪談個案的角色。在解工作單問題的過程中，研究者一面觀察個案的自發性解題歷程與記錄，一面思索訪談線索。當個案完成解題時，不論結果對錯與否，研究者都先給予口頭上的肯定，然後再引導個案針對自己的解題紀

錄完整說出自己的想法，並以複述個案談話重點作爲鼓勵他繼續發表的策略；若學生在解題過程未使用圖形表徵，研究者也會要求個案嘗試以圖形表徵的方式輔助說明，從其作圖過程與說明的對話當中，再次進行檢核；倘若個案無法完整表達個人想法時，研究者將揣摩個案原意，以提供敘述選項的方式供個案選擇並要求詮釋，以達最少的介入。研究者不以個案學生能否正確解答作爲唯一判準，而是以學生的自發性解題爲探索起點，透過個案的解題紀錄、口語說明與圖形表徵三者的線索比對，以確認其分數基準化

能力。

(二)工作單

工作單主要是用來蒐集個案在分數基準化問題的初始解題表現，作爲深入訪談的線索依據。因此，研究者參考現行九年一貫中小學分數除法相關教材，以商的數值型態爲縱軸，以基準量與比較量的數值型態爲橫軸，編訂分數基準化問題雙向細目表（表3-1）。工作單內含商爲整數與商爲非整數（值＞**1**）兩種題型，商爲非整數（值＜**1**）的題型因難度較高，故不在本研究討論的範圍。題目主要區分爲整數除以分數、同分母分數相除、異分母分數相除三種不同數值型態的問題，每一種類型的題目都有2 題，總共有6 題。因爲個案尚未學習過與分數除法相關的教材單元，因此研究者參考教材中較爲生活化的題目情境設計問題，在題目的文字敘述上，力求以學童能夠理解的形式呈現，將所有數據的數值控制在15 以內，分數的分母則以不超過10 爲原則，以增加個案嘗試作答的意願。

表3-1 分數基準化試題雙向細目表

題目類型 比較量的
數值型態
基準量的
數值型態 題目數值 題
號
整數除以分數 整數 真分數
（非單位分數） 4÷
2
3 ＝6 1
同分母分數相除 假（帶）分數 真分數
（非單位分數） 1
3
5 ÷
2
5 ＝4 3
商
爲

整
數
異分母分數相除 單位分數 單位分數 1
2 ÷
1
6 ＝3 5
整數除以分數 整數 假（帶）分數 6÷1
1
3 ＝4
1
2 2
同分母分數相除 假（帶）分數 假（帶）分數 2
1
5 ÷1
2
5 ＝1
4
7 4
商
為
分
數 異分母分數相除 單位分數 單位分數 1
2 ÷
1
5 ＝2
1
2 6

三、資料蒐集與分析

本研究的主要資料來源為解題紀錄與訪談紀錄兩種。解題紀錄係指個案在工作單上的初始解題紀錄，與訪談過程中個案為解釋個人想法而加以補充的文字、符號或圖形表徵。訪談紀錄係指研究者在觀察個案的解題歷程與初始記錄後，針對其初始解題表現所進行的深入訪談內容。

研究者將蒐集到的資料，經過編輯、轉錄、編碼、歸類等階段，逐漸形成原案（protocol），最後進行原案分析（protocol analysis）。在轉錄的過程中，研究者會省略與主題無關的對話、並適當修飾用詞及內容，以便於閱讀。訪談紀錄的編碼方式是以4 碼

數字加1 碼英文字母呈現，前2 碼數字代表問題編號，後2 碼數字代表轉錄資料行號，最後1 碼英文字母S 代表個案，T 則代表研究者。研究者將解題紀錄與訪談紀錄歸類、結合成可供分析的原案，以利後續分析；原案分析時，爲能清楚呈現個案可能具備的分數基準化能力，研究者將工作單問題依整數除以分數、同分母分數相除、異分母分數相除三種類型依序討論呈現，同時爲了避免訪談內容的重複性過高，文中將僅呈現具代表性的訪談內容。

在訪談過程中，研究者透過工作單紀錄、觀察以及訪談等不同資料來源的三角校正 (triangulate)，可以更客觀的分析個案的解題表現，增進資料分析的效度。以前述問題的解題訪談分析爲例：小唐最初的解題紀錄是「$2\div\frac{1}{4}=8$ 答：8 天」，當研究者要求他根據解題紀錄進行說明時，小唐主動補充紀錄計算過程「$2\div\frac{1}{4}=\frac{8}{4}\div\frac{1}{4}=8$」，並說明「2 可以等於$\frac{8}{4}$，所以可以用$\frac{8}{4}\div\frac{1}{4}$來算，因爲兩個分母相同，所以用分子8÷1 來算」。研究者並不以小唐解答正確並作出合理說明而驟下結論，於是更進一步追問「用分子8÷1 來算是什麼意思？」，促使小唐做更深入的說明「8 代表8 份$\frac{1}{4}$……，8 份

1

4

÷1 份

1

4

等於8 倍」，由

此對話線索，研究者認定小唐運用單位量轉換的方式成功解題，應該具備了將

1

4

視爲新

單位的單位化能力。

研究者又再次要求小唐嘗試將解題想法以圖形表徵表示出來，並進行口語說明。小

唐指出「將2 公升分成1 公升和1 公升，再把1 公升等分成4 份，每一份就是

1

4

公升，

兩個4 份合起就是8 份，那每天只能喝1 份就是

1

8

瓶汽水。」，研究者據此更加確認前述

的判斷正確，並從解題紀錄、口語說明與圖形表徵三者的線索比對，確認小唐具備單位

分數對於整數的基準化能力，亦從中察覺小唐成功解題的關鍵，可能在於他具備單位分

數「

1

4

」的單位化能力，以及掌握整體量「2」與整數單位「1」以及單位分數「

1

4

」三

者的化聚關係，作爲後續研究的重要線索。

肆、研究結果

本章研究結果將依整數除以分數、同分母分數相除、異分母分數相除三種題型進行

分析，茲討論如下：

一、整數除以分數

(一)能將真分數

2
3 視爲新單位，以
2
3 「基準化」整數
◎原案一
【問題一】小花家前面的小路全長4 公里，她想沿著道路兩旁種花，只知她一天可種
2
3 公里，請問她最少需要工作幾天才能把整條道路種滿花？
0101S：因爲一天可種
2
3
公里，所以用全部4÷
2
3
＝6，6 天。
0102T：能說清楚一點嗎？
0101S：因爲一天可種
3
2
公里，所以用全部6
3
4 ÷ 2 = ，6 天。
0102T：能說清楚一點嗎？
0103S：因爲4÷
2
3 ＝
12
3 ÷
2
3 ，所以12 個
1
3 ÷2 個
1
3 用12÷2＝6 就可以算出來
圖4-1 小唐「問題一」的解題紀錄
一位國小六年級學生在分數基準化問題的解題表現

55

0104T：好，那說說看你的圖是怎麼畫的？

0105S：題目是說

2

3 公里，不是說是

2

3 條道路，所以

2

3 公里是將1 公里分成3 份後取

其中的2 份叫

2

3 公里，所以我把4 公里分成4 個1 公里，再把每一個1 公里

分成3 份，1 份就是

1

3 公里，所以2 份就是代表1 天

2

3 公里，所以2 份、2

份…一共是6 天。

◎分析一

在原案一中，小唐似乎對於整數與單位分數間的化聚十分熟悉，因此在運算過程中，
他並沒有將整數轉換成假分數的過程寫出，就直接心算出答案6 天；然而在研究者的追
問下，小唐才將運算過程紀錄寫上，並補充說明是「因爲4÷

2

3

＝

12

3

÷

2

3

，所以12 個

1

3

÷

2 個

1

3

用12÷2＝6 就可以算出來」。

Greeno（1983）強調，所謂概念的實體（conceptual entity）可視爲認知物件，是可以
在心理程序（mental procedure）進行操作的（be manipulated）。依Greeno 的觀點，小唐在
運思的過程中，已能將單位分數
1
3
視爲是一種概念的實體（conceptual entity），也就是將
1
3
單位化，換言之，
1
3
這個分數在小唐心理運思程序，是一個可操作的認知物件。
當研究者要求小唐嘗試圖形表徵時，他先將4 公里分解爲4 個1 公里的組合，再將
每一段代表1 公里的線段平分成3 小份以表徵出
1
3
公里，接著合成單位分數「
1
3
」以形
成集聚分數「
2
3
」，並將
2
3
視爲新單位，最後在圖形中清楚標示出全部4 公里共包含了6
個
2
3
公里，並能清楚說明（行號0105S）。由以上分析顯示，小唐具備雙向的「部分－整
體」運思能力，能清楚分辨1、
1
3
和
2
3
的三階層關係，其分數概念發展至少已達巢狀分數

階段，因此小唐在處理整數除以非單位分數的分數基準化問題時，是透過整數單位「1」
與單位分數「
1
3
」來掌握題目所描述的各個數量的大小，將基準量與比較量想像成各是
「多少個的單位分數」，掌握兩者與單位分數的倍數關係，順利以心算方式、符號表徵與
圖形表徵等不同方式進行解題。
(二)能將帶分數1
1
3 視爲新單位，以1
1
3 「基準化」整數，並清楚描述兩階段的基準
化過程
◎原案二
【問題二】小明釀了一桶6 公升的葡萄酒，他想分裝成每瓶1
1
3 公升的小瓶裝販售，
問小明將酒全部倒完後，可分裝成幾瓶？
0201T：4.5 怎麼算出來的？
0202S：6 就是
18
3
，1
1
3
變成
4
3
，所以18÷4 就等於4.5
0204T：18 是指什麼？
0201T：4.5 怎麼算出來的？
0202S：6 就是
3
18
，
3

11 變成
3
4

，所以18 ÷ 4 就等於4.5

0204T：18 是指什麼？
圖4-2 小唐「問題二」的解題紀錄
一位國小六年級學生在分數基準化問題的解題表現
57
0205S：18 是指18 個
1
3 ，除以4 個
1
3 就算出4.5
0206T：能解釋一下你的圖嗎？
0207S：（指長線段圖）全部是6 公升，平分成6 份，每一份是1 公升；（指短線段圖）
一小瓶要裝1
1
3 公升，所以這是1 公升，還要
1
3 公升，所以將這個1 公升分
成3 份，這裡是
1
3 公升，所以這全部就是1
1
3 公升。
0208T：畫得很仔細哦！那怎麼看出4.5 瓶？
0209S：要畫的話太麻煩了，我用講的。每1 公升平分成3 等份，1 份就是
1
3 公升，
所以全部6 公升是18 份，因爲1
1
3 公升就是4 個
1
3 ，所以4 份裝1 瓶，4 份
裝1 瓶，就是4 瓶還剩下2 份，2 份剛好是半瓶，所以是4.5 瓶。
◎分析二
「問題二」和「問題一」的結構十分相似，主要的差別在於本題目除數的數值由真

分數變為假分數，而且商變為非整數，是屬於兩階段的基準化問題。原式6÷1

1

3 必須轉換

為

18

3 ÷

4

3 ，以「4 個

1

3 」來基準化「18 個

1

3 」，分二階段求取兩者的倍數關係。第一階段

以

18

3 ÷

4

3 得到商為整數倍**4** 與餘數「2 個

1

3 」（即

2

3 ），第二階段以餘數

2

3 ÷

4

3 ，即以「4

個

1

3 」來基準化「2 個

1

3 」得到商為一半，即是小數倍**0.5** 或是分數倍

2

4 （即

1

2 ），所以

基準量1

1

3 對於比較量6 的基準化結果是**4.5** 或**4**

1

2 倍。如果要判斷學生是否理解此類問
題，最直接的判斷依據就在於學生能否說明分數商所代表的意義，也就是學生能否清楚
指認第一次基準化之後的餘數，是代表「剩下幾個單位分數 」而非是「剩下幾個整數單
位1」。

在原案二中，小唐同樣是先將整數6 轉換成等值分數
18
3 ，再將1
1
3 轉換成
4
3
（0202S），然後運用基準量與比較量各是「多少個單位分數」的思考方式，順利求出答
案（0205S），看似已具備帶分數對整數的基準化能力。作圖時，小唐先畫出代表全體量6
公升的線段圖，以二分法分成左右兩半，再將每一半分成3 小段，表徵出每一小段是1
公升；找出代表1 公升的線段後，小唐先複製一段，然後再複製另一段1 公升線段並將
它等分成3 份以求出
1
3 公升，最後將1 公升與
1
3 公升的線段合併成代表1
1
3 公升的線段
圖。小唐雖然透過整數單位「1」爲中介，順利將兩數量表徵成線段圖，但並沒有明確表
徵出兩數量間的倍數關係，研究者無法判定其基準化能力是否完備，因此進一步追問「怎
麼看出4.5 瓶？」（0208T），小唐雖然沒有繼續作圖，但他以口述的方式說明作圖方法
（0209S），其中「**6** 公升是**18** 份，因爲**1**
1
3 公升就是**4** 個
1
3 ，所以**4** 份裝**1** 瓶，**4** 份裝**1**
瓶，就是**4** 瓶還剩下**2** 份」代表小唐以「4 個
1
3 」基準化全體量「18 個
1
3 」的第一階段
基準化過程，「**4** 份裝**1** 瓶，就是**4** 瓶還剩下**2** 份，**2** 份剛好是半瓶，所以是**4.5** 瓶」，代

表小唐以「4 個
1
3 」基準化剩餘量「2 個
1
3 」的第二階段基準化過程。這些證據證實了小
唐能掌握單位分數
1
3 與集聚分數1
1
3 之間的倍數關係，並將集聚分數1
1
3 視爲新單位，以
此新單位分兩階段基準化整數6，確實具備帶分數對整數的基準化能力。小唐成功解題的
關鍵，在於掌握整數單位「1」、單位分數「
1
3 」與各數量間的化聚關係，以「基準量、
比較量各是單位分數的多少倍」作爲基準化運思的基礎。

二、同分母分數相除

(一)掌握「部分－部分－整體」的關係，運用真分數
2
5 「基準化」同分母帶分數。
◎原案三

【問題三】一瓶汽水2 公升，小明喝了
2
5 公升，請問剩下汽水是小明喝掉的幾倍？
0301S：一瓶汽水2 公升，小明喝了
2
5
公升，那剩下的就是2－
2
5
＝
8
5
＝1

3
5
，題目問
剩下的是喝掉的幾倍？所以用1
3
5
÷
2
5
＝
8
5
÷
2
5
＝4，答4 倍
0301S：一瓶汽水2 公升，小明喝了
5
2
公升，那剩下的就是
5
13
5
8
5
2 − 2 ＝ ＝ ，題目
問剩下喝掉的幾倍？所以用4
5
2
5
8
5
2
3
15 ÷ ＝ ÷ ＝ ，答4 倍。
0302T：很好！你這一次圖畫的很特別哦！說明一下吧！

0303S：就是這一整罐的汽水是2 公升，我把它分成上面是1 公升，下面是1 公升。
其中上面的斜線是1 公升中的
2
5 ，就是
2
5 公升。
0304T：你說
2
5 公升是怎麼畫出來的？
0305S：就是1 公升平分成5 等份，再畫出其中的2 等份就是
2
5 公升。
0306T： 再來呢？怎麼知道是4 倍？
0307S：下面的1 公升也分成五等份，所以一共剩下8 份是
8
5 公升，所以是2 份的4
倍。
圖4-3 小唐「問題三」的解題紀錄

◎分析三
在原案三中，小唐能掌握「部分－部分－整體」的關係，經由整體量2 公升及部分
量
2
5
公升來求出另一個隱藏的部分量1
3
5
公升，再依題意直接以集聚分數
2
5
以及1
3
5
為運
思單位，列出算式求取「部分與部分」的關係（行號0301S）。另外小唐在此題的圖形表
徵表現和「原案一、二」非常類似，都是先表徵出整體量再分解出整數單位「1」，進而
掌握整數單位「1」、單位分數以及集聚分數三者間的化聚，藉由「基準量、比較量各是

多少倍的單位分數」進行解題，順利以圖形表徵兩數量間的倍數關係，同時輔以口語說明基準化過程（行號0307S）。因此，研究者判定小唐確實具備同分母真分數基準化帶分數的能力。

(二)能將帶分數1

2

5 視爲新單位，以1

2

5 「基準化」同分母帶分數，並清楚描述兩階段的基準化過程。

【問題四】老師將一條5 公尺的彩帶分給三個人，小明分得

5

2 1 公尺，小華分得

5

1 2

公尺，剩下的給小英，問小明分得的彩帶是小華的幾倍？

◎原案四

【問題四】老師將一條5 公尺的彩帶分給三個人，小明分得2

1

5 公尺，小華分得1

2

5

公尺，剩下的給小英，問小明分得的彩帶是小華的幾倍？

圖4-4 小唐「問題四」的解題紀錄

0401S：題目問「小明是小華的幾倍？」，所以小英是騙人的，直接用2

1

5 ÷1

2

5 ＝

11

5 ÷

7

5

＝1

4

7 ，就是1

4

7 倍。

0402T：1

4

7 是怎麼算出來的？

0403S：分母一樣啊！所以用11÷7＝

11

7 再變成帶分數就是1

4

7

0404T：那圖是怎麼畫的？

0405S：小明2

1

5 公尺，我先畫出2 公尺，那1 公尺就是一半，把1 公尺平分成5 份

就是

1

5 公尺，所以這是2

1

5 公尺。那小華1

2

5 公尺也是把1 公尺和

2

5 公尺合

起來。

0406T：那怎麼看出答案1

4

7 倍

0407S：能看出是1 點多倍，詳細幾倍用算的比較快。

0408T：真的嗎？要不要再畫畫看？

0409S：太麻煩了，我用說的，把每個1 公尺都平分成五份就可以了，小明總共是11

份，小華是7 份，所以是1

4

7 倍，就是剛剛說的1 點多倍。

0410T：你說圖形的1

4

7 倍是怎麼知道的？

0411S：剛才有算啊！因爲11 份÷7 份算出來答案是1 餘4，所以就是1

4

7 倍。

0412T：爲什麼算出來1 餘4 就是1

4

7 倍？那1

4

7 中的 1、7、4 又代表什麼意思？

0413S：這就和假分數變成帶分數是一樣的，11÷7＝1…4，這個1 就是整數部分，餘數4 就是說剩下4 份，4 份是占7 份的

4

7 ，合起來就是1

4

7 倍。

0415T：我還是不大懂你的意思，你能利用線段圖說明嗎？

0416S：好，剛才不是說可以看出1 點多倍嗎？（指著小明的線段圖）這裡和小華一樣長就是1 倍，剩下的部分（指著小明的線段圖多出的部分）再和小華比較，

11－7 剩下4 份，4 份是7 份的

4

7

，所以全部是它（指著小華的線段圖）的

1

4

7

倍。

◎分析四

「問題四」和「問題二」都是屬於兩階段基準化的問題，也就是說比較量2

1

5 無法整

除基準量1

2

5 ，原式2

1

5 ÷1

2

5 必須轉換爲

11

5 ÷

7

5 ，以「7 個
1
5 」來基準化「11 個
1
5 」，分
二階段求取兩者的倍數關係。第一階段以
11
5 ÷
7
5 除得到商爲整數倍**1** 與餘數「4 個
1
5 」（即
4
5 ），第二階段以餘數
4
5 ÷
7
5 得到商爲分數倍
4
7 ，所以基準量1
2
5 對於比較量2
1
5 的基準化
結果是**1**
4
7 倍。
在原案四中，小唐能針對題目問句尋找相關資訊，主動忽略多餘訊息（小英部分），
順利以算式求出答案。從算式運算過程，研究者可以看出小唐將2
1
5 和1
2
5 分別轉換爲「11
個
1
5 」和「7 個
1
5 」，以比較量與基準量分別是「多少個單位分數」的方式進行基準化運

思（行號0401S；0403S），可是研究者無法從算式中看出小唐兩階段基準化的過程，因
此要求他嘗試以圖形表徵進行說明。
在圖形表徵的過程，小唐不同於算式運算是以「多少個單位分數」進行運思，反而
是將帶分數視爲是整數與真分數的結合，先畫出整數部分，再利用整數單位「1」表徵出
單位分數，然後聚合單位分數形成真分數（行號0405S），這和小唐先前的作圖表現非常
一致。小唐能運用分段表徵再結合的方式，順利將兩數量表徵成合理的線段圖，但他並

沒有清楚表徵出兩數量的倍數關係，因此研究者進一步追問「怎麼看出答案1

4

7 倍？」，
結果小唐直接比較線段圖並回答「1 點多倍」，但無實際作圖（行號0407S），然而在研究
者追問之下，小唐口述說明作圖方法（行號0409S），亦無法從中看出確切的基準化運思
過程。
最後研究者要求小唐說明答案「1

4

7 」中，數字1、7、4 代表的意義，藉此探尋他對
於二階段基準化過程的掌握。小唐在口語說明時以「一份」來稱呼單位化之後單位分數

1

5 ，順利將

11

5 ÷

7

5 轉化爲11 份÷7 份（實際代表11 份

1

5 ÷7 份

1

5 ）整數型態的兩階段基準
化問題，同時，他也察覺到假分數

11

7 轉換到帶分數1

4

7 的分數變換過程，其實就是兩階
段的整數基準化過程（行號0413S），這證實小唐熟悉兩階段整數基準化概念，並利用此
經驗來解分數基準化問題。此外，小唐的解題說明與「舉止」（行號0416S），具體的表現
出他能將代表1

2

5 的線段圖（小華的部分）視爲新單位，重新詮釋另一線段圖所代表的數

量情境2
1
5 （小明的部分），符應了Lamon 對於基準化歷程的看法，而且當小唐發現第一
次比對無法完整詮釋該數量情境時，能針對剩餘數量
4
5 再次進行詮釋，正是兩階段基準
化的解題歷程。
由上述的證據證實，小唐能清楚指認基準量與比較量，並延續兩階段的整數基準化
的經驗，將分數型態的基準量與比較量分別視爲是「多少個單位分數」的思考方式，將
題目轉化爲整數基準化問題，以算式運算求出基準化的結果，並能以合理的線段圖詳加
說明兩階段的分數基準化過程，確實擁有同分母帶分數基準化帶分數的能力。

三、異分母分數相除

(一)能用一個以上的共測單位進行基準化解題，並作出圖形表徵
◎原案五

【問題五】小廚師上市場買了一大塊牛肉重
1
2 公斤，想將它切分成每片重
1
6 公斤的
牛排販售，問小廚師共可切得幾片牛排？
0501S：全部重
1
2 公斤，每
1
6 公斤切一片，所以是
1
2 ÷
1
6 ＝
6
12 ÷
2
12 答案等於3。
0502T：爲什麼會變成
6

12 和
2
12 ？
0503S：因爲分母不一樣，所以就要先把分母變一樣才能算；要把分母變一樣就直接
用2x6＝12 來當分母就可以了。
0504T：爲什麼說直接用2x6＝12 來當分母就可以了？
0505S：這樣算比較快，因爲這樣一定能找到同分母的分數。
0506T：那還有沒有其他的變法？
0507S：有啊！分母變成6 也可以，
1
2 ÷
1
6 就變成
3
6 ÷
1
6 ＝3。
0508T：你怎麼會知道分母要變多少？
0509S：以前學過啊！就2 和6 他們的倍數就可以。
0510T：好！那說明一下你的圖吧！
0511S：這個磅秤上的肉重
1
2 公斤，要分成每片
1
6 公斤，能分幾片？（學生畫了一幅
磅秤示意圖）
0512T：好，那你能不能畫成線段圖來表示呢？
圖4-5 小唐「問題五」的解題紀錄

0513S：就這樣，這是
1
2 公斤，平分成3 段，把這一
段再畫到下面來就是
1
6 。
0514T：你怎麼知道要這樣畫？
0515S：因爲

1
2 等於
3
6 呀！所以把這一段平分成三份，每一份就剛好是
1
6 。
◎分析五
異分母分數基準化問題的解題關鍵在於能否尋找公共測量單位，以等比例運思的共
變概念，將基準量與比較量分別轉換爲「多少個共測單位」以進行基準化。
在原案五中，小唐能沿用異分母分數加減或比較大小的解題舊經驗，成功以通分方
式找出兩個以上的新單位分數（
1
12 、
1
6 ）作爲公共測量單位，透過單位量轉換的方式，
以算式運算求取基準化結果（行號0501S；0507S），顯示其分數概念發展已達有理數階
段。
小唐在圖形表徵過程中，他所選用的共測單位恰等於基準量
1
6 ，因此小唐只要掌握
了比較量與共測單位的化聚關係，就是同時掌握了比較量與基準量的倍數關係；事實上，
因爲小唐已經知道
1
2 等於
3
6 也就是3 個
1
6 ，所以他逆向操作，先將代表比較量的線段圖
三等分，然後再複製其中的一小段作爲基準量，順利的表徵出兩分數的基準化關係（行
號0512S、515S），證實小唐具備異分母單位分數對單位分數的基準化能力。

(二)未運用共測單位作圖，以表徵兩分數之間的基準化關係
◎原案六
【問題六】下圖代表長
1
5 公尺的緞帶，請問
1

2 公尺的緞帶是它的幾倍？你能畫出代
表長
1
2 公尺的線段嗎？
1
5
公尺
0601T：爲什麼要這樣算？
0601T：爲什麼要這樣算？
0602S：因爲
1
2 和
1
5 的分母不同，所以要變成相同分母才能算，就像要算加法是一樣
的。
0603T：那爲什麼答案的分母是2 不是10？
0604S：因爲
1
2 ÷
1
5 變成
5
10 ÷
2
10 ，是5 個
1
10 ÷2 個
1
10 ， 所以2 個，2 個，最後剩1
個剛好是2 個的一半，所以是2
1
2 倍，就是2.5 倍。
0605T：誰是誰的2.5 倍？
0606S：
1
2 是
1
5 的2.5 倍

0607T：那圖是怎麼畫？
0608S：題目說這一段是
1
5 公尺，所以畫5 段一樣長就是
5
5 公尺（右邊紙張不夠畫，
圖4-6 小唐「問題六」的解題紀錄

所以小唐把最後一段畫在左邊），也就是1 公尺，那
1
2 公尺就是一半啊，所
以全部切一半畫下來就是
1
2 公尺了。
0609T：還有別的畫法嗎？
0610S：（想了一會，搖搖頭）
0611T：能從算式來畫嗎？
0612S：（看看算式，想了一會，搖搖頭）
◎分析六
問題六是兩階段異分母單位分數基準化問題，解題過程中，除了要尋找公共測量單位之外，也要分兩階段進行基準化，而題目更限制了基準量的圖形表徵，目的在於探究小唐對於公共測量單位與基準化關係的掌握程度。
在原案六中，小唐能沿用異分母分數加減或比較大小的解題舊經驗，成功以通分方式找出新的單位分數作爲公共測量單位，透過單位量轉換的方式，以算式運算進行解題，並說明兩階段的基準化過程（行號0604S）。但是值得注意的是，共測單位在異分母分數基準化問題的解題過程扮演重要的角色，小唐雖能透過比較「基準量與比較量各是多少倍的共測單位」來求算兩數量間的基準化關係，然而他在圖形表徵的過程，共測單位「
1
10 」
並未展現在表徵圖上；此外，小唐雖能確切地指出「
1
2 是
1
5 的2.5 倍」（行號0606S），可
是在圖形表徵的過程，他卻忽略了此倍數關係，未直接將代表基準量
1
5 公尺的線段圖複

製2.5 次以表徵比較量
1
2 公尺，反而是將
1
5 公尺複製5 次表徵出1 公尺，再將1 公尺取一
半以表徵出
1
2 公尺（0608S）；最後，當研究者進一步詢問小唐有無其他作圖方法？甚至
提示他從算式關係來作圖（行號0609T； 0611T），小唐均無法察覺算式運算與作圖的關聯性，很顯然地，小唐對於共測單位與兩單位分數之間的熟悉程度，尚不如他對兩單位分數與整數單位「1」之間「部分－整體」關係的掌握。

伍、結論與建議

本章根據上述研究結果之分析，綜合歸納形成結論，並依據研究發現與結論提出教學建議，分別說明如下：

一、結論

研究者綜合小唐在不同型態分數基準化問題的解題表現，作出二點結論：

(一)能利用單位分數，以算式運算解決所有的分數基準化問題

在不需要轉換單位量的分數基準化問題中，以原案四的題目最爲困難，小唐能將單位分數
1
5 視爲是一個「認知物件」，以此「物件」作爲心理操作的運思材料，將帶分數型態的比較量與基準量轉化爲
11
5 和
7
5 ，進而轉化爲「11 個物件」和「7 個物件」的整數關係，利用兩階段整數基準化的思考模式，進行分數基準化解題。

在需要轉換單位量的異分母分數基準化問題中，以原案六的題目較爲困難，小唐能以通分方式找到新的單位分數
1
10 作爲共同測量單位，分別將比較量與基準量轉換成與共測單位相同分母的等值分數，再將分數型態的比較量與基準量轉化爲「5 個
1
10 」和「2

個
1
10 」的整數關係，利用兩階段整數基準化的思考模式，進行分數基準化解題。
由此可知，單位分數的單位化能力是解分數基準化問題的必備能力，能否掌握單位
分數與比較量、基準量之間的化聚，順利將基準量與比較量轉換成「多少個單位分數」
的整數關係，是小唐理解分數值大小的思考依據，也是小唐進行基準化運思的關鍵；換
言之，因爲小唐掌握單位分數與整數單位「1」的「部分－整體」關係，能將單位分數視
爲是可作爲心理操作的認知物件，所以能透過單位分數與集聚分數之間的化聚，來理解
分數值的大小，並進行基準化解題。
另外一項值得注意的是，原案二、四、六的問題都是屬於兩階段分數基準化問題，
多數學童在解這一類的問題時，大多是模仿、記憶多於理解，僅能依賴機械式的算則運
算求解，然而小唐在這類問題的解題過程中，習慣以物件式的口語稱呼「份」、「個」來
稱呼單位分數，對於第一階段基準化之後所得的餘數，都是以「幾份」、「幾個」來描述，

因此能夠清楚分辨其代表的意義是多少「單位分數」而不和整數單位「1」產生混淆，對
於兩階段分數基準化過程有正確的理解。
(二)能利用共測單位解題，但並未以它表徵兩分數之間的基準化關係
在原案五中，題目欲求
1
2 ÷
1
6 ，小唐能找出兩個以上的新單位分數（
1
12 及
1
6 ）作爲
公共測量單位，以算式進行基準化運算，但是在圖形表徵的過程中，因爲小唐所選用的
共測單位恰等於基準量
1
6 ，所以小唐只要掌握了比較量與共測單位的化聚關係，就是同
時掌握了比較量與基準量的倍數關係；換言之，小唐利用比較量與共測單位的化聚關係，
反向作出基準量線段圖的當下，也就同時表徵出兩分數的基準化關係了。但是小唐此一
作圖表徵的過程，並無法完全對應到他在算式運算中，先將基準量與比較量分別轉換爲
「多少個共測單位」之後再進行基準化的解題歷程。
在原案六中，題目欲求
1
2 ÷

1

5 ，小唐能找出新的單位分數（

1

10 ）作爲公共測量單位，

以算式進行基準化運算，但他作出的表徵圖形亦無法與算式相稱。小唐未能運用共測單位

1

10 與比較量、基準量的化聚關係，作圖表徵兩分數之間的基準化關係，反而是透過整數單位「1」來作圖，這顯示小唐對於共測單位與兩單位分數之間的熟悉程度，尚不如他對兩單位分數與整數單位「1」之間「部分－整體」關係的掌握。

二、建議

從上述結論與研究過程中發現，小唐熟悉單位分數與整數單位「1」的「部分－整體」關係，透過單位分數與整數單位「1」來掌握其他分數值的大小，是小唐進行分數基準化解題成功的關鍵；在兩階段分數基準化問題的解題過程，小唐利用單位分數將題目轉化爲整數基準化問題，對於第一階段基準化運算之後所得的餘數以「幾份」、「幾個」來稱呼，可清楚指認餘數的意義，有意義的完成兩階段分數基準化解題。因此研究者從教學者的角度，提出以下二點教學建議：

(一)透過指示物（referent）來加強分數「部分－整體」構念的教學，奠定分數基準化能力的基礎

從研究過程與結果中發現，能否掌握各個單位分數單位與整數單位「1」的化聚關係，是小唐理解分數值大小的思考依據，亦是小唐進行分數基準化運思與嘗試圖形表徵成敗

的關鍵。事實上，掌握此類關係的能力，就是掌握分數的「部分－整體」構念，此構念可說是分數比較大小與分數基準化能力的基礎。

因此建議教師在進行分數教學時，應加強學生指認單位量的能力，針對單位量的指示物進行等分割活動，協助學生理解單位分數單位與整數單位「1」的「部分－整體」關係，並透過單位分數單位來理解分數值的大小，同時在教學過程中，可透過指示物的比對活動，進行尋找具有簡單倍數關係之分數，建立學生初步的分數基準化經驗。

例如，讓學生實際四等分割一條彩帶，引導學生以

1

4 條彩帶作爲測量單位，分別拼湊出

1

4 、

2

4 、

3
4 、
4
4 條彩帶的長度，從具體指示物的操作活動中建立分數「部分－整體」
的觀念，並理解分數值的大小，更可進一步透過指示物的比對活動，尋找具備簡單倍數
關係的分數，如（
1
4 、
3
4 ）和（
1
4 、
2
4 、
4
4 ），建立學生初步的分數基準化經驗。
(二)教師提問「分數商」的意義，幫助學生理解分數基準化意義。
關於兩階段基準化問題的教學歷程，一般來說，商的整數部分是學生較容易理解的，
而商的分數部分就困難多了。例如整數的基準化問題11÷7 =1
4
7 ，學生能否知道餘數4 是
幾個7 呢？學生是否知道求出來的分數商就是餘數4 與「基準量7」的第二階段基準化結
果？然而，當題目類型拓展到兩階段分數基準化問題
11
5 ÷
7
5 =11÷7 =1
4
7 時，學生能否知
道分數商
4
7 是從何而來呢？而上述兩個相同的分數商
4
7 又有哪些相似或相異之處呢？
學生能否指認分數商所代表的意義，是兩階段基準化問題的解題過程中，用來判定
學生是否理解兩階段分數基準化過程的重要依據。因此在教學過程中，教師若能適時進
行提問，讓學生練習指認分數商的意義，可進一步協助學生釐清兩階段基準化解題的程
序，理解兩階段的分數基準化意義，建立分數基準化概念。

參考文獻

呂玉琴（1991a）：國小學生的分數概念：1/2 vs. 1/4。國民教育**, 31**（11、12）,頁10-15。
呂玉琴（1991b）：分數概念：文獻探討。台北師院學報**, 4**, 頁573-606。

呂玉琴（1991c）：影響分數二分之一概念的因素：個案分析。國民教育**, 31**（11、12）,16-21。
何鳳珠（2004）：國小六年級學童以七巧板發展分數基準化能力之研究。國立嘉義大學數學教育研究所碩士論文（未出版）。
林碧珍（1990）：從圖形表徵與符號表徵之間的轉換探討國小學生的分數概念。新竹師院學報**, 4**, 295-347。
周筱亭、黃敏晃主編，蔣治邦、謝堅、陳竹村、吳淑娟、林昭珍編著（2000）。國小數學教材分析－分數的數概念與運算。台北：教育部台灣省國民學校教師研習會。
周筱亭、黃敏晃主編，陳竹村、林淑君、陳俊瑜編著（2001）。國小數學教材分析－整數的乘除運算。台北：教育部台灣省國民學校教師研習會。
洪素敏（2002）：國小五年級學童分數迷思概念補救教學之研究。國立嘉義大學數學教育研究所碩士論文（未出版）。
教育部（2001）：國民中小學九年一貫課程暫行綱要。 台北：教育部。
國立編譯館（2000）：國民小學數學教學指引第九冊。台北：國立編譯館。
國立編譯館（2000）：國民小學數學教學指引第十一冊。台北：國立編譯館。
康軒文教事業股份有限公司(2004)：數學教學指引國民小學**(**第十一冊**)**。台北：康軒文教事業股份有限公司。
甯自強（1993）：分數的啓蒙～ 量的子分割活動的引入。教師之友**, 34**(3), 45-51。
甯自強（1997a）：量的子分割（二）～ 真分數的引入～ 。教師之友**, 38**(4), 33-39。
甯自強（1997b）：量的子分割（三）～ 等値分數的引入～ 。教師之友**, 38**(5), 36-40。
楊壬孝（1989）：國小學生分數概念的發展。國科會專題研究計劃成果報告。
黃瑞琴（2002）：質的教育研究法。台北：心理出版社。
劉秋木（1996）：國小數學科教學研究。台北：五南圖書出版公司。
劉祥通（2004）：分數與比例問題解題分析一從數學提問教學的觀點。台北：師大書苑。
Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh., & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and process* (pp. 91-126). New York: Academic Press, Inc.
Behr, M. J., Harel, T., Post, T. R., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In Grouws, D. A. (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (P.296-333). New York: Academic Press, Inc.
Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical strictures*. Dordrecht,

Holland: D. Reidel Publishing Co.
Greeno, J. (1983). Conceptual entities. In D. Genter & A.L.Stevens(Eds.), *Mental Models* (pp.227-252). Hillsdale , NJ: Lawrence Erlbaum.
Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews, in mathematics education research. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp.517-545). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
Gray,E. M., ＆Tall,D.(1993). Success and failure in mathematic: The flexible meaning of symbols as process and concept. *Mathematics Teaching*, 142, 6-10.
Gray,E. M., ＆Tall, D. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A ”proceptual”view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25(2)*, 116-140.
Lamon, S. J. (1990). Ratio and proportion: cognitive foundations in unitizing and norming (ERIC Document Reproduction Service No.ED325 335).
Lamon, S. J. (1994). Ratio and proportion: cognitive foundations in unitizing and norming. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp.89-122). Albany, NY: State University of New York Press.
Ning, T. C. (1992). Child's meanings of fractional number words. Unpublished doctoral dissertation. The University of Georgia, Athena, GA.
Steffe, L. P.(1994). Child's multiplicative schemes. In G. Harel, & J. Confrey(Eds.), *The Development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 3-39). New York: State University of New York Press.

A Sixth Grader's Performance in Solving the Fraction Norming Problems

Chung-Ping Yen[1] Shiang-Tung Liu[2]

[1]Shih Hsien Elementary School, Chiayi City
[2]The Graduate Institute of Math Education, National Chiayi University

Abstract

The purpose of this study was to explore a sixth grader's performance in solving the fraction norming problems. The study was a case study. The task-based interview technique was conducted during the process of data collection. The interview was based on task-writing. The fraction norming problems of the task consisted of three types: integer divided by fraction, fraction divided by fraction of the same denominator, and fraction divided by fraction of the different denominator. There were two problems within each type. There were a total of six problems in the task. The mathematical achievement of the student was between middle and upper in his class. He was willing to address his opinion in the classroom. He was always pleased to challenge mathematical problems actively. Before this study, he has not learnt of fraction division problems.

The major findings of this study were as follows: In general, the student could viewed the unit fractions as cognitive object to solve the problems of the first two types above-mentioned, and represented the norming relationship with appropriate graphical representation. Although he could solve the problems of which fraction divided by fraction of the different denominator, he has not graphically represented the norming relationship between two fractions with a co-measurement unit.

Key words: fraction, basic quantity, norming, problem solving