

# 三角形內心的另類教學

粘孝瑄<sup>1</sup>

張靜馨<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 苗栗縣立公館國民中學

<sup>2</sup> 國立彰化師範大學科學教育研究所

(投稿日期：94年10月15日；修正日期：94年12月6日；接受日期：95年1月10日)

## 摘要

本文呈現出在問題中心雙環教學模式之下，融入真實數學教育理論來設計給學生學習的三角形內心教材及實施的經過。教學時，藉由問題解決來激發學生的任務動機，並透過教材及教師的引導、環境的營造，帶領學生親身經歷三角形內心發明的過程。學生在面對問題情境時，顯現出統整的知識結構，並透過知識結構的擴張，達到真正的學習。在其中，學生的學習能力得到發展、感性與理性得以統整，建構出濃縮了對大自然感性關懷與理性思維的三角形內心概念。

關鍵詞：三角形內心、另類數學教學、真實數學教育、問題中心雙環教學

## 一、前言

在行為主義及傳統知識觀的影響下，解釋—練習(explain-practice) (Lo,Wheatley & Smith, 1994;Wheatley,1991)導向的講述式教學法在教室一直被廣泛且唯一的使用著；而數學知識也被視為一套完備的體系，被當作「成品」來傳播 (Gravemeijer,1997)，學習被視為刺激和反應的連結，學生的感受與想法受到嚴重的忽視，學生的智慧被侮辱，數學變成了枯燥、艱難與挫敗的代名詞。在這樣的環境之下，學生的腦袋被浪費掉，教師浪費太多時間在填鴨，做無意義與無效率的事，也因此台灣的數學教室產生了不少低成就、程度低、不了解或聽不懂、沒興趣、恐懼數學等類型的學生 (張靜譽，1999)。

傳統的數學教室裡，三角形內心概念與性質常被當作靜態的知識直接傳輸給學生。最常見的教學模式便是先告知學生三角形內心的定義，接著說明相關性質，再透過重覆演練習題來讓學生熟記，並以此做為進一步學習或推理思考的基礎，以應付考試。教師很快地完成進度，部分學生也可以透過模仿、練習與記憶來學習。然而，在這種學習方式之下，仍有很多學生並無法穩固地建構起三角形內心概念的相關性質，也嚴重干擾了後續三角形外心及重心的學習。傳統注入式的教學之下，學生學到的往往只是低階的表面三角形內心的性質，罕見有學生了解為何要學習這單元，而願意繼續學習的學生也逐漸減少。這種流於零碎知識記憶的學習，對學生的發展毫無助益，學生的知識結構無法得到擴張，無法產生真正的學習 (Dubinsky,1992)。在這種教學情況之下，願意繼續來學習的學生大多數是受了升學、處罰、他人期望……等外在壓力的影響。更糟糕的是，會有很大部分的學生聽到數學便開始感覺無趣、枯燥甚至害怕、焦慮、恐懼、想逃避(張靜譽，1999)，學生學習到再怎麼努力也沒用的價值觀，數學成了一輩子的陰霾，遑論讓學生能主動探索、欣賞數學的美與奧秘、培養帶的走的能力 (教育部，2003) 及數學的素養 (NCTM,1989,1991)。

為了改善上述的窘境，我們在問題中心雙環教學模式(Problem Centered Double Circles; PCDC)的架構之下(張靜譽，1995，1996)，融入真實數學教育(Realistic Mathematics Education ;RME) (Freudenthal,1973,1991;Gravemeijer,1994,1997)的理念來設計可以讓大部分學生學習的三角形內心概念學習教材。藉由問題的解決來激發學生的學習動機，吸引學生來接觸數學，並透過教材及教師的引導、環境及氣氛的營造(張靜譽，1995，1996)，讓學生親身經歷三角形內心發展的過程，仿佛走上數學家的路，重新發明數學(Freudenthal,1973,1991;Gravemeijer ,1994)，並讓學生透過解題活動，培養探索、分享、溝通……等帶的走的能力 (教育部，2003)。

## 二、教學活動設計理念

Dubinsky(1992)主張應該讓學生透過與生活情境的互動，達到認知結構的修正與擴張，才能產生真正的學習。真實數學教育理論亦強調教師應佈置蘊含數學概念的情境(Gravemeijer, 1994)，讓學生利用原始的基模來中和(neutralize)與情境互動引起的混亂(perturbations)，使學生在解題過程中形成屬於自己較非正式(informal)的解題模式，作為進一步學習的基礎，再透過同儕之間的互動與比較，喚起其它的想法(Wheatley,1991)，進而精緻化自己的思維，進入形式化的數學階段(Gravemeijer,1994)。設計問題時，必需考量學生的學習軌道(Simon,1995)，為學生的思維作小階梯的安排，讓他們可以依照自己的能力，或而步步為營，或而大步邁進，攀向位在雲端的形式數學，藉以引導他們逐步數學化進而重新發明數學(Freudenthal,1973,1991 ;Gravemeijer,1994,1997)。

學習者與真實情境互動，透過自己原始的基模，來組織思維以解決問題。這些親身經驗

的活動，一步步進入學習者的腦海，再透過教師的引導與同儕的刺激來讓學習者反思這些解題的過程，讓整個解題活動能在學習者的腦海裡自由地來去(run through)(Dubinsky,1992)，進而反思抽象(reflective abstraction)(Piaget,1970;Wheatley,1991)內化成屬於自己的主觀知識(Ernest,1991)，學習者的學習便由具體的肉體活動慢慢地發展出形式化的數學物件(Dubinsky,1992)。因此，學習者對於形式化的數學知識便產生了與之對應的心靈結構，形成了有意義的學習，學習者對於數學知識並非將只是形式符號的記憶與操弄(Dubinsky,1992)。當學習者無法了解抽象符號的意義時，更可以自由地回到他心靈裡最熟悉的地方，即具體的活動中，再次鞏固具體的解題過程，並在具體與抽象之間，自由地來回，再次建構形式化的數學知識(Dubinsky,1992)。學習者在解題活動中所建構的屬於自己的主觀意義與概念，再藉由小組間與全班性的發表與討論，分享及外化自己的主觀知識，並經由同儕間以及師生間的互動、修正與精緻化，形成了數學社群所認同的客觀知識(Ernest,1991;張靜譽，1995，1996)。

問題中心雙環教學模式強調教學時，教師需著重「任務」的設計、「環境」的營造及學生思維及對話的「引導」與教學過程的「分析」，讓學生在解題活動中，透過互動、對談、內化與外化機制的不斷循環，建構新知(張靜譽，1995，1996)。

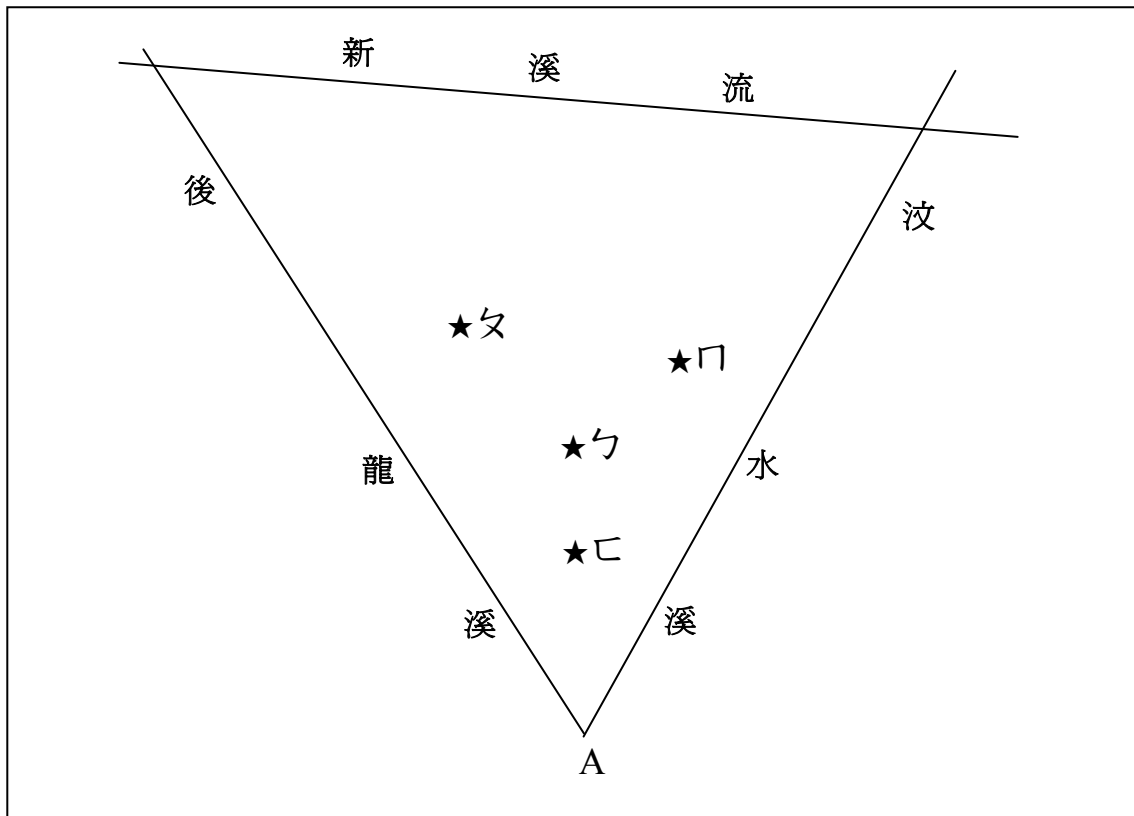
本文的教學設計便是在這些理念的指引與問題中心雙環教學模式的架構之下，設計蘊含三角形內心概念的生活情境，並透過有用與有趣的任務及激發學生的好奇心與好勝心，來刺激學生投入學習(張靜譽，2001)。更著重環境與氣氛的營造，學生思維、互動及溝通的引導，讓學生磋商知識，建構所學(張靜譽，1995，1996)。並在教學過程中仔細分析學生的反應，來反思問題設計、環境及對話的引導，以作為立即性的修正。此外，為了讓學生在思索解題時更考量了他們與生活環境的關係，在問題情境中更融入了諸多人文與環境議題，讓學生們對大自然的情感得以伴隨著內心概念的學習得到發展。

### 三、教學經過

要讓學生投入學習，進而全面地探索與自由地創造，激發學生投入是第一要務。特別是學生在面對數學時，不但必需要先消除或減弱學生對數學的恐懼與枯燥感，更要激發學生對數學有趣、有用的價值感與好奇心(張靜譽，2001)，讓學生眼睛為之一亮(黃政雄，2002)，讓解決問題成為學生他們自己的工作或任務(Wheatley,1991;張靜譽，1999)。此時，蘊含了數學概念且學生熟悉的生活環境充當了探索數學的起始點(Gravemeijer，2001)，讓學生專注地投入於問題解決的工作，並在這過程中發展內心概念。亦在探索數學之餘，讓學生感覺自己與大自然及鄉土環境的關係，激發學生對鄉土環境、多元文化的認同與關懷。以下是第一作者(即實施教學的教師;后文略作 T)在教室進行三角形內心另類教學時給學生的任務和引導學生對談的部分節錄與說明。

下圖是早期苗栗縣境內泰雅族部落的空照圖，圖中的後龍溪與汶水溪，提供居民日常生活所需的水源與魚、蝦、鰻、蟹。A 點是這兩條溪流的會流處，此處設有攔砂壩，而ㄅ、ㄆ、ㄇ、ㄏ則居住著泰雅族原住民同胞。

汶水溪是後龍溪的分支，因為在汶水與後龍溪會合，所以取名為汶水溪，而後龍溪則是此流域的主流，在後龍出海，所以取名為後龍溪。後龍溪中原本有著成群結隊的毛蟹、香魚、黑鯛、赤翅仔、烏魚，而且幾乎伸手一抓即有，然而在環境受到污染之後，幾乎已經少見蹤跡。早期，在溪中更遍佈著國寶級的原生魚種，蓋斑鬥魚(俗稱龐鼓辣)，色彩艷麗、姿態優美、有活力且適應力強，然而現在也已經少見了(江鑫義，2003)。



為了怕打草驚蛇，封閉學生們的心靈（張靜譽，1999），使他們拒絕數學的學習，也為了激起學生對生活環境的感知，T先與學生寒暄，一方面讓學生思考與他們息息相關的後龍溪的生態，另一方面，也讓學生無聲無息地在一個安全與愉快的學習環境中探索數學。

在其中，學生呈現了許多地理學上的知識與創意以及對於大自然的關懷。學生由傳統教學之下極為不主動的反應轉為好奇地想看看，喜歡說說看，且不論是什麼程度的學生都有參與學習的機會。好奇心的驅使加上自由與開放的學習環境，提供了學生一個專注投入的機會。

T：在圖中 A 處設置的攔砂壩，有何功用，對生態有何影響？

S：可阻擋砂石，才不會造成下游泥沙淤積，但也因此會讓河口向內縮，造成領土變小。

S：沒有海埔新生地了。

S：可避免土石流，但是體能差的小魚會卡在這裡被大魚吃或被人類抓走。

S：若阻擋太多砂，會造成潰堤，旁邊農田就完蛋了。

S：可暢通河道、澄清水源、防止泥沙淤積，不然水質污染了之後，魚蝦都不能活了。

S：魚類不能洄游產卵，會造成生態不平衡。

T：尤其是毛蟹，必需到海口產卵，以前後龍溪裡面很多，可以讓母豬補充營養，增加乳汁分泌，但是現在產量減少許多。有何方法改善？

S：設置魚道，就是在攔砂壩或大水閘旁留一條路讓魚能夠通行。

T：大家知道魚道嗎？

S：知道，地理有教。

T：嗯，其實設攔砂壩有好有壞。當然啦，要看從什麼角度、什麼需要去思索。只是人類在思考這些問題時應該多考慮大自然與人類的關係。

學生的好奇心被激起之後，討論的氣氛也跟著熱絡起來，對大自然的愛也被強調著。亦意識到人類與大自然的關係。T 繼續以提問的方式，持續讓學生的眼睛維持發亮，並繼續進行數學的探索。

在 T 的經驗裡，學生對距離這一概念的定義經常無法產生有意義的連結。也就是學生腦海裡沒有與距離這一概念相對應的心靈結構。T 讓學生透過解題的需要，自由地三三兩兩找人討論並引導學生思考，讓學生清楚最短的路徑就是垂直的線段，也就是數學裡定義的距離，學生在合作中體會到學習是大家的事，人際智慧亦在無形中得到發展。

T：在ㄅ、ㄆ、ㄇ、ㄊ這些位置上的原住民同胞，會走最短的路徑到溪裡面去取水，請畫出他們所走的路徑。

T：什麼是最短的路徑？

S：原住民的家到河流的最近路線。

S：最近的距離。

T：如何畫？

S：平平畫過去。

S：這樣會最短嗎？我畫垂直還更短。

T：什麼垂直？到底怎麼畫才會最短？

S：垂直畫才是最短，用目測就知道。

S：垂直那一段就是距離，最近的走法。

S：最快、最不會累。

此時，學生將「最短的路徑」、「垂直線段」與「距離」做了有意義的連結。學生透過討論，也用最原始的「目測」或「量量看」來確認答案，並得以感覺出線條之間的關係。

接著，再讓學生透過觀察，運用「距離」的概念來解決問題，並讓角平分線能慢慢地浮現，且建構出角平分線上的點到此角兩邊等距離的性質。

T：根據大家的判斷，ㄅ、ㄆ、ㄇ、ㄊ這些位置上的原住民同胞，他們分別會到哪一條溪裡面去取水？

S：ㄆ到後龍溪，ㄇ到汶水溪，而ㄅ、ㄊ都可以。

T：像ㄅ、ㄊ這種兩條溪都可以去的位置，有幾個？

S：無限多個。

T：如何把這些點通通找出來？

S：用量的。

S：不用，直接把ㄅ、ㄊ連起來，這條線上的點都可以。

S：ㄅ、ㄊ同一線上的都可以。

T：為什麼？

S：感覺。

透過教室觀察，發現有部分學生尚未清楚。研究者繼續提問，讓學生透過思索問題來建構更多具體的基礎，並發現這關係。

T：在圖中找出三個點來蓋木屋，使這些木屋分別離兩條溪流的距離一樣，並將圖中的區域公平劃分為屬於

後龍溪與汶水溪的兩區域。

透過觀察與互動，學生已經能夠輕易地回答這個問題，並具備足夠的基礎，T 便引導學生觀察出這條線的性質。

T：說說看，感覺一下，你們畫的劃分線，與 $\angle A$ 有什麼關係？

大部分同學觀察猜測這一條線是 $\angle A$ 的平分線，但並無法確定。T 期望學生們能更進一步地確認自己的猜測，所以讓學生們思考如何去說服別人。此時提供了學生與他人溝通、表達與推理的機會。當學生的好勝心被 T 以激將的語調激發出來後，他們更是投入於思索，也自由地發表他們自己的看法。

T：看誰能說服別人它的確是 $\angle A$ 的平分線？

S：看起來很像。

S：應該是角平分線，只要對摺測試一下就知道了。

S：重疊，兩角當然一樣，所以是角平分線。

為了讓學生更清楚角平分線上的點到角的兩邊等距離，T 引導學生運用對稱的想法來說服自己與別人。T 以引導性的問題來刺激學生們思考，喚起他們對活動的覺知，並讓整個活動烙印在他們的腦海裡，使學生們的思索與他們的活動做連結。最後，T 以點醒的方式來引導學生下結論。T 為了不製造「權威」的氣氛與讓學生有所思索(Romberg & De Lange,1998)，T 於提問時，口氣委婉、面帶狐疑並尾音上揚，讓學生們自行來批判 T 的提問是否合理。

T：對摺之後，觀察到什麼？會不會左右對稱？

S：會。

T：對稱代表什麼意思？

S：角一樣大。

T：取水的距離呢？

S：重疊，就是一樣。

T：這麼說，到兩溪流等距離的位置有幾個？

S：有無限個。

S：角平分線上的點都可以，就是對摺的那條線。

緊接著，T 以學生們所發展的角平分線性質為基礎，更進一步地擴大他們的認知結構，並試圖進一步地再內化學生組織解題活動的過程，形成更大規模的心靈結構，建構出內心概念。T 為了讓學生繼續投入學習，且讓學生運用認知結構裡所有的相關智慧，表現出自己的創意，所以他繼續詢問學生問題，做為進一步學習的開端。學生開開心心地回應了一些有意思的想法，也反映出他們對周遭人、事與物的關心。

T：為了擴展居住範圍，泰雅族居民挖了一條新的溪流，位置如空照圖所示。大家來為這條溪流命名，並說

明為何取這個名字。

S：雅流溪。泰雅人所挖，也為泰雅人所流。

S：後汶溪。一頭接後龍溪一頭接汶水溪，且後龍溪是主流，汶水溪是支流。

S：清澈溪。希望它能夠清清澈澈的。

S：大雄溪，我的綽號。

S：維他命溪，好玩。

S：笑嘻溪，因為高興。

S：Water King 溪，因為是具有代表性的溪流。

S：清水溪，因為上流的水較乾淨。

S：開心溪，我希望大家來到這裡都會很開心。

T 再佈題引導學生建構內心概念之下龐大的心靈結構。T 透過觀測站的架設來作為進一步的學習任務，亦希望學生在思索蓋觀測站時，能考量到生態或其它面向的問題。而學生也在這氣氛之下，得以統整心中對大自然的關懷與腦海裡相關的知識，來解決問題。

T：爲了要更有效地監控這三條流域的情形，居民決定要在離三條河流等距離的位置上蓋一個觀測站。如果你是工程設計師，首先你要考量什麼？特別是生態方面的喔。

S：不能破壞水土保持，要尊重大自然。

S：要有原住民色彩的。

T：有沒有聽說過宜蘭厝運動，與生態工法？就是在蓋房子時要考量到與當地環境的配合，房子形狀啦、大小啦、顏色啦要融入當地環境，甚至要跟鄰居家配合，才能有和諧的感覺。生態工法簡單來說，就是在開發大自然時要謹記最少開發的原則，與大自然和平共存。

T 繼續將學生的學習軌道切細(Simon,1995)。且非形式地評量學生是否已經能把握住角平分線性質，以適時地調整與修正研究者的教學。此時，研究者再以激將的語氣來激發學生投入於思索。

T：猜猜看觀測站會不會在 $\angle A$ 的平分線上，討論看看。有人說會，有人說不會，到底會不會，要拿出一些證據來，爲自己的言論辯護。

學生在討論後幾乎都能正確地回答這個問題，也能正確地說明他們的想法，也投入於邏輯的思索。

S：會。因爲觀測站必須離三條溪等距離，所以首先它必須先離後龍溪與汶水溪等距離，也當然它必須在角平分線上。

S：因爲角平分線到角的兩邊垂直距離相等，在之前我所作的是角平分線，所以到兩條溪的垂直距離相等。而觀測站要到三條溪的垂直距離相等，所以到兩條溪距離也要先相等，所以也會在劃分線上。

S#：會，因爲我畫三條角平分線相交於一點。

S#平常學習數學都是靠記憶與重覆練習，數學表現平平，T 並未清楚她的學習狀況，擔

心她是透過作圖觀察來得到結論，並未把握住角平分線性質，所以 T 於下課時晤談她。

T：妳是先畫一畫，然後發現的。

S：對啊！

T：那妳為何要畫角平分線？

S：因為這樣才會到三條河流等距離啊！

T：為什麼可以確定，妳可以說說妳的想法來說服我嗎？

S：就因為角平分線到兩邊距離會一樣，那三個都要一樣(她指著學習單上觀測站離三條溪的距離)，所以這也要一樣。

T：喔，我知道了。

由學生的反應，及透過與學生的晤談，T 對學生是否已掌握此性質深具信心。接著學生很容易地找出了觀測站的位置。

學生完成所有活動之後，T 再將焦點放在兩個部分：第一，加強角平分線性質與角平分線交點(觀測站)與三角形三邊(三條河流)的關係；第二，試圖讓學生將所有的活動與所建構出的性質以及這龐大的認知結構，包括人與生活環境的情感，濃縮成「內心」這一概念。

T 繼續引導學生，讓學生的思維專注於整個解題過程，並喚醒學生對整個解題活動的覺知，便將對談的重點放在上述兩點，讓內心概念得以與所有活動與性質做有意義的連結。

T：同學們很輕鬆的找到這觀測站，如果說要同學再回憶一次今天的活動，同學們想的起來嗎？

S：……？

T：想一想，這個觀察站是如何找出來的？

S：角平分線的交點。

T：那為何要畫角平分線？

S：角平分線性質。

T：可否詳細說明？

S：角平分線上的點到兩條河距離會一樣。

T：那要到三條河距離一樣呢？

S：再找另一個角平分線。

T：三條角平分線都找出來？

S：不用，兩條就可以。

T：那為何角平分線上的任一個點到兩條河距離會一樣？想一想一開始的活動。

S：對摺觀察出的。

S：兩距離重疊，就是一樣。

T 接著引導學生脫離脈絡來思考，進而提昇學生的思考層次，進入抽象數學的階段。

T：嗯，那我隨便畫一個三角形，你們認為有辦法在三角形內部找到一個與三邊距離一樣的点嗎？

S：可以。

T：注意喔，隨便畫一個三角形喔。



S：……？

S：還是可以。

T：那老師再問你們，有沒有辦法在這三角形的內部畫一個圓，讓這圓同時與三角形的三邊相切？想一想。

S：……？

S：可以。

T：有那麼厲害嗎？

S：就把交點當圓心啊，垂直的距離當半徑。

T：啊？什麼？聽不懂ㄝ，上來畫畫看好了。

S：因為平分線交點到三邊距離一樣，所以畫一個圓剛好相都切。

在確認學生已掌握住角平分線性質，且所有的解題活動與性質都可以自由地在腦海裡來回之後，研究者認為是「內心」這一名詞出現的時候了。

T：誰來為這個圓心取個名字？

S：就是內心啊！課本有寫。

T：那大家知道為何它叫內心嗎？

S：內圓中心。

S：內圓圓心啦。

T：內圓？

S：內切圓。

S：內切圓圓心，所以叫內心。

T：喔，這樣啊。

不同於傳統的記憶與重覆且機械式的精熟練習，T讓他的學生親身經歷了一個數學概念被重新發明的過程(Freudenthal,1991)。

#### 四、結果與討論

經過如此的學習歷程，學生較能夠掌握住內心概念，S##在補習班學習內心、外心與重心，然而他卻將這三個概念搞混，但透過親身經歷內心的發展過程後，得以清楚自己所學的是什麼。

S##：補習班的教法，讓我搞不清楚什麼是內心，不管我如何背，很快又忘了，不然就是搞混，現在我記憶深刻，而且如果搞混了，想到那後龍溪觀測站的由來，就清楚了。

將數學蘊含於學生熟悉的生活情境中，吸引學生的注意，讓學生想來”看一看”裡面有什麼？為何數學課在上這些東西？並以激將的語氣，讓學生來“猜一猜”，“想辦法說服別人”，並“激發學生之間互相比較”，來促使學生參與討論，磋商出更好的想法與更有效率的解題策略，使學生對數學及學習產生了積極的想法。

S：剛開學老師說要將數學變的有趣，我認為應該還是個問題，但是現在有用、有趣，真的可以。

S：生活中的東西，居然演變成數學，好像數學藏在生活中、河流裡、田裡……。後龍溪在我家旁，裡面也有數學，真神奇。

以學生感興趣的情境，搭配寒暄的口吻，讓學生敞開心靈，進入一個安全的學習環境中，再無聲無息地進入數學的學習。教師並不需要以威權來恫嚇學生，學習氣氛反而會變得融洽愉快，此時學生得以自由地思索與創造。研究者接納所有學生的想法，並進一步地由學生的想法中來引導他們思考，學生得以愉快地透過磋商、辯證來投入創造性的活動。

S：以前很怕數學，聽不懂、嚴肅、深奧，盡可能去躲(雖然我知道這樣會更慘……)，但討厭終究是討厭，現在不會逃避，漸漸喜歡數學，因為學數學變得沒有壓力、很愉快。

S：我變的比較主動，想要去思考，覺得想數學很有趣。從不知道題目在講什麼，到主動思考，再到與同學討論，最後得到答案，腦筋不斷在運轉，讓我覺得愈來愈聰明。

環境議題、鄉土環境與對原住民文化的接觸，提供了一個讓學生情感得以發展的地方，在其中，對環境的重視及對鄉土的愛被討論與思索，亦被強調著。學生更在思索解決問題中統整了這些感性的關懷。體驗了人類文化活動與大自然以及生活環境間的關係。

S：以前我不喜歡思考，現在我不但會想要去想東西，甚至回家也會想，像後龍溪跟數學的關係，我從來沒聯想過，我坐公車回大湖，看著後龍溪，就一直想，想地理、環保、生物、古時候的人、通通跟數學想在一起，每次坐車都會去想，發現新的想法，就會有一種很奇妙的感覺，無法形容，很爽快。

學生在解決問題中，統整了他們各方面的能力來面對問題情境，帶的走的學習能力與多元智慧，亦得到發展的機會。

S：當我在敘述一件事給別人聽時，有時別人不會了解，我只好再想想看，讓他了解，有時發現是我自己不清楚，有時發現要換個方式來溝通，讓對方能聽懂，因為自己的思維模式跟別人不一樣，只能經過討論才能了解。但很難拿捏說話語氣，怕說太重會傷人也是我該注意的。

S：數學課不只是學數學，還學很多其它的東西，我們都可以探索，教別人時也會發現自己很有口才。

受到好奇心、好勝心的驅使與成就感的滿足，學生願意來接觸數學，甚至投入於問題的解決或任務的完成。在安全、自由及開放的學習環境之下，學生比較放心和願意冒險地以不同的想法來思索。

S：以前是模仿式的學習，現在走向 open，當我專心的思考問題並解決時，那種感覺真是很難形容，學習數學對我來說變成一件很興奮的事。

S：以前上數學課是玩，現在也是玩，但是玩的不一樣，現在可以學到東西，很愉快，可以自由想像。

S：現在學習數學，看似簡單的題目，卻讓我想破頭，也促使我深入思考。當我面對學習單上的問題時，我就開始胡思亂想，很多想法都行的通，感覺愈想愈多，停不下來，那種感覺很爽。

在思索修築攔砂壩與觀測站時，考量到環境議題，思索如何與大自然取得平衡，以和諧

共處。亦在人與人的互動中，更了解自己與別人，也發揮了人性的愛與關懷。

S：在互動當中，我可以發現每個人的特質、個性、散發出來的氣味，發現他到底是怎樣的人，亦可以讓自己變成新的自己，找出自己的調調。

S：這樣的學習讓我從單打獨鬥到分工合作，再到和抵萬難。

S：(以前)我學數學是應付考試，我學數學非常在意成績，也很喜歡跟別人比較，當他成績超越我時，我會十分努力來打敗他，但當我已經很努力還考輸時，我就會非常的傷心與生氣。我曾經有一次，我考 94 分，錯一題，而###考 96 分，錯一題，這時我就回座位，趴著我就在哭，同學都紛紛問我怎麼了，我就說：「第一我氣###考贏我，第二我也氣自己考輸他」。曾經我還跟他說過：「你知道嗎？如果我今天可以殺了你，我很有可能會 do it，但是我不能。」他很驚訝的問：「Why？」，我就說：「如少了你，不就少了一個競爭對手了嗎？」他跟我說他覺得我的想法很可怕，其實不用他說我也知道，只是現在有法律及理性還有良心在約束我。以上全是我個人的事，我從沒跟別人說，但是(現在)我也不怕別人知道，因為我再也不會這樣了，我反而會因為生活化的學習單能讓大家容易了解、提升信心及興趣而感到高興。

## 五、總結

傳統的數學教室裡，學生學不來，不是被認為資質低便是被歸因於不用功，教師也因此產生了兩極的反應，即，放棄學生或恫嚇與施壓。如此的對待方式，常常導致於雙輸的局面，一再地惡性循環之下，教室逐漸變成人間煉獄，師生動輒怒目相向，雙方苦不堪言。T 也經歷過這樣的歷程。然而，當 T 換個方式來對待學生和教學之後，情況完全改觀了，T 的學生能夠真正學習也樂於學習，學習氣氛變得民主、開放及和樂，學生也能夠獲得真正的發展。

本研究把將知識傳輸給學生的方式，改為引導學生建構與內心概念相對應的心靈結構，讓學生親身經歷內心概念發明的過程，鞏固了內心概念及相關性質。在這一個融入環境與多元文化議題的學習情境中，學生顯現出一個統整的認知結構來面對問題，更在與情境的互動當中，學生的認知結構不斷地得到修正與擴張，產生一個更大的認知結構，而此龐大的認知結構，包括整個解題的過程與人與人之間及與環境間的情感，濃縮成了「內心」這一個概念，產生了有意義的學習。而學生在解決問題的過程當中，也考量了如何在不傷害他人自尊心之下與他人達成有效地溝通，也思索如何與大自然和諧共處，對於生活中的後龍溪也有了不同的認知。

學生主動地探索，解決了傳統教室裡枯燥、對立與壓抑的窘境。學生經歷如此的學習歷程，將更有機會發展學習的能力，漸漸脫離對教師的依賴，得以獨自探索，並培養終身學習的能力與態度。而學習的動機來自於好奇心、好勝心的滿足與對完成任務的追求，不再以成績的獲得與勝過同儕為目的。學習也不再是個人單打獨鬥，而是互助與互信的小組學習，有助於激發學生善良的一面。當學生在分享、試圖說服他人與捍衛自己言論時，更能發展與精緻化自己的表達及溝通能力，學習變得較為主動，也較有機會了解自己與他人，並得以親身經驗與體會數學的奧秘，視數學為一門產生於日常生活當中，有價值的學問。如此的體驗，得以啟發學生用心來思考生活週遭的人、事與物。更重要的是學生在面對融入議題的問題情境，諸如：環保、生態、生物、多元文化與人性方面的議題時，潛能更是不斷地顯現，不斷地發展，心靈亦得以自由地馳騁。

一個有趣、有用且值得探索的任務，吸引了學生的投入，激起了學習氣氛，學生視需要

而找人討論，自然地形成了一起學習的小組，教師不必費心地幫學生分組，也不必強迫學生學習與討論，更無須擔心班級秩序失控，也不怕學生會學不來。

總之，只要適當地改變教與學的方式和內容，原本枯燥乏味的三角形內心的學習也會變得有趣又有用。而且原本只有少數人可以學習的數學，也會變得大多數人甚至全班都可以學習。

## 參考文獻

江鑫義 (2003)：讓蓋斑鬥魚回來吧。大河壩，11。

教育部 (2003)：國民教育階段九年一貫課程總綱綱要。台北市：教育部。

張靜譽 (1995)：問題中心教學在國中發展之經過、效果及可行性之探討。科學教育學刊,3(2),139-164.

張靜譽 (1996)：採用建構主義，如何教學？建構與教學，7。

張靜譽 (1999)：國中低學習成就班的雙環數學教學。科學教育學刊,7(3),199-216.

張靜譽 (2001, 12 月)：認識九年一貫課程及數學能力指標。論文發表於發展符合九年一貫課程能力指標的數學教材研習會。彰化市：彰化師大。

黃政雄 (2002, 12 月)：全人教育。論文發表於中華民國第十八屆科學教育學術研討會。彰化市：彰化師大。

Dubinsky, E. D. (1992). Development of the Process Conception of Function. *Educational Studies in Mathematics*,23,247-258.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*, London Falmer.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht:Reidel.

Freudenthal, H. (1991). Revising Mathematics Education. *China Lectures*. Dordrecht : Kluwer.

Gravemeijer, K. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education*. Utrecht:CD β-Press.

Gravemeijer, K. (1997). Instructional design for reform in mathematics education. In M. Beishuizen, K. Gravemeijer & E. C. D. E. van Lieshout (Ed.), *The role of contexts and models in the development of mathematics strategies and procedure* (PP.13-34). Culemborg Press.

Gravemeijer, K. (2001,11 月). *Developmental Research, A Course in Elementary Data Analysis as An Example*. Paper presented at the Netherlands and Taiwan Conference on Common Sense in Mathematics, Taipei.

Lo, J. J. Wheatly, G. H. & Smith A. C. (1994). The Participation, Beliefs, and Development of Arithmetic Meaning of a Third-Grade Student in Mathematics Class Discussions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(1),30-49.

National Council of Teachers of Mathematics(1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA:National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics(1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston, VA:National Council of Teachers of Mathematics.

Piaget, J. (1970). *Genetic Epistemology*. New York: Norton.

Romberg, A. & de Lange, J.(1998). *Mathematics in Context:Teacher Resource and Implementation Guide*. Britannica Mathematics system,USA.

Simon, M. A. (1995).Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective.  
*Journal for Research in Mathematics Education*,27,114-145.

Wheatley, G. H. (1991). *Constructivist perspectives on science and mathematics learning*.Science  
Education,75(1),9-21.

# An Alternative Instruction of the Incenter of a Triangle

Shiau-Chiang Nian<sup>1</sup>

Ching-Kuch Chang<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Gung Guan Junior High School, Miaoli

<sup>2</sup>Graduate Institute of Science Education, National Changhua University of Education

## Abstract

The paper presents an instruction sequence and a teaching process of the incenter of a triangle under the teaching model of Problem Centered Double Circles fusing Realistic Mathematics Education theories. Inspiring students' task motivation through problem solving, and by the guidance of the instruction sequence and of the researcher, and the construction of the environment, the researcher guide the students to experience the creation of the incenter of a triangle. When students encounter the problem situation, they show their whole mental structure. Through the expansion of it, they acquire the true learning. During the learning process, their learning ability developed and emotional and rational thinking integrated, and then construct the incenter of a triangle with the compassion of the nature and rational thinking.

Key words: alternative mathematics instruction, PCDC, RME, the incenter of a triangle