國小高年級學童解樣式題之代數思考：以線性圖形樣式題為例

馬秀蘭
嶺東科技大學企業管理系

（投稿日期：96 年 11 月 14 日；修正日期：97 年 1 月 17 日、97 年 2 月 26 日；接受日期：97 年 6 月 13 日）

摘要

本文旨在探究 40 位國小高年級學童解線性圖形樣式題之代數思考，以作為以圖形樣式活動去啓蒙學童進入代數文化教學的參考。本文以相關理論與學生實際解線性圖形樣式題表現，整合並細分 Orton 和 Orton（1999）所提出的解決樣式題之發展階段以及層次分類，而建立國小高年級學童解線性圖形樣式題能力層次，即層次 0、1、2、3a、3b、4a、4b、4c。研究發現若學童是以「幾何趨近」的轉換法解題，其中關注每一個新圖是連續增加幾個差距的分析性思維，有助於樣式能力提昇及代數思考產生。高年級學童由能力層次 3a 之算術思考，演進到層次 3b 了解一般化如何趨近之算術-代數思考的過渡期，最後才提昇到層次 4 有製造一般化通式能力的代數思考。此探索性研究之結果將提供給未來有嚴謹設計之後續研究者進行大樣本之檢測。

關鍵詞：一般化、代數思考、國小高年級、線性圖形樣式

一、前言

數學家 Ian Stewart（葉李華譯, 1996）認為人類是生活在一個充滿樣式（pattern）的宇宙中，自然界每一個樣式都是一個謎；數學的那手好戲就是幫人類解謎，能將藏在某些樣式底下的法則與結構發覺出來。因而數學是被描述為樣式（pattern）及次序的科學（National Research Council[NRC], 1989）或被認爲是樣式及關係（relationships）的搜尋（Biggs & Shaw, 1985）。全美數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics[NCTM], 1989）指示，對5到8年級學童而言，研讀樣式是發展代數推理的一個多產方法。Lee(1996)的教學實驗顯示透過樣式活動去介紹代數是可能的。因此樣式活動對小學生代數基礎之奠定扮演著一個重要角色（Herbert & Brown, 1997; Naylor, 2002)。

樣式活動著重於樣式的發展及規律的感覺，並可作尋求樣式、延伸樣式及歸納樣式技巧的練習；換言之，即利用這些樣式，學生不僅要延伸樣式，而且要尋找一個一般化的通則或是代數的關係。「一般化表示（expressing generality）」是四個代數之首要根源之一（Mason, Graham, Pimm, & Gowar, 1985）；因此當學童在學習代數概念之初，唯一可啓蒙他們進入代數文化的方法是去製造一個樣式一般化的活動情境(Lee, 1996)。English 和 Warren(1999)則建議：把代數式與具體脈絡作聯結(如圖形樣式)是發展基礎代數想法有效的方法之一。因此當學童尚未正式接受代數式課程時，教師可以圖形樣式活動去啓蒙學生進入代數文化。

學童將圖形樣式題轉換成數列模式的方法有三種，即直接計數立即將圖形轉換為數列、審視新形狀需要多少更多的點、以及觀察圖形外形(Orton, Orton, & Roper, 1999)。而孩童的樣式能力與解題階段關係密切，依 Orton 和 Orton（1999）的指示，孩童對樣式問題之反應可分成層次 0、1、2、3、4。但本文關心的是：學童轉換圖形到數字樣式的不同方法是否會影響他們的關注點與解題方向，繼而影響他們的樣式能力層次？而學童的樣式能力層次與代數思考之關係為何？線性樣式是指連續項的差是常數的樣式，如 5，8，11，14，…；二階樣式則是指連續項的差所構成之樣式的差是常數的樣式，如 2，6，12，20，…(其連續項的差所構成之樣式為 4，6，8，…)。因線性樣式比二階樣式容易，故前者是一般教科書中最常出現的樣式。而本文將著重在國小高年級學童在「線性圖形樣式題」之表現。針對上述問題，本文之目的如下：

1. 探討學童轉換圖形到數字樣式之解題法與其能力層次之關係；
2. 探討學童的樣式能力層次與代數思考之關係。

二、研究理論基礎

Orton 和 Orton（1999）依照孩童是否能解決一個點樣式題的下一項、第 10 項、第 15 項和第 n 項，將樣式的發展分成 1、2、3、4 階段（stage），額外並加入階段 0（沒有進展），同時將階段 4 再分成 4a、4b、4c，即一個正確的文字描

述、嘗試作一個代數式、一個正確的代數式（可不須簡化）。但是他們發現孩童在解決某些樣式題時，只有少數的解題表現能超越階段 1，因此他們改採用層次（level）的方式，根據孩童解題行為中有無掌握到項次間不同層次之關係進行分類，其分法如下：

層次 0：沒有一點進展；

層次 1：學生已注意數的一些特性，或許描述出部分樣式；

層次 2：學生注意一個樣式，但未將其描述出來，因而仍未推出下一項；

層次 3：學生知如何用差距去推出下一項；

層次 4：學生展示出關係瞭解之證據，但是可能未表達出一個代數式。

在此作者整合 Orton 和 Orton（1999）所提出的樣式發展階段 4 之 4a、4b、4c 以及樣式層次分類 0-4，而建立國小高年級學童解線性圖形樣式題能力層次，即層次 0、1、2、3、4a、4b、4c。

一般化是描述任何項之數量和該項位置間關係的一個規則或函數，規則可能是文字符號或圖表。層次 3 的學生雖然知道如何用差距去推出樣式下一項，但他們對一般化如何趨近可能有不同反應；馬秀蘭（2003）指出學生對一般化有不同程度表現，有的學生在解樣式題（如 5，8，11，14，…）時是採用一個答案接著一個答案，將最後答案強求出來的「遞迴法」，如 5，5+3=8，8+3=11，…29+3=32，則他/她就不知一般化如何趨近；因此學生在解樣式題時是由知一般化如何趨近，如將樣式表示成 5，5+3，5+3+3，5+3+3+3，…，演進至有製造一般化通式的能力，如 5，5+3x1，5+3x2，…，5+3x9，或 5+3x（n-1）。

Ma（2007）在探討學生解樣式題之研究中指出，有些學生能知覺一個對代數發展有用的樣式，如將一個二階圖形樣式題(如圖 1 所示)寫成「2，3+3，4+4+4，5+5+5+5，…」之表示式，此分析式思維之解題策略顯示出「怎樣想到的」過程，其是易於被引導去發展函數概念，如第 1 圖：2x1，第 2 圖：3x2，第 3 圖：4x3…。

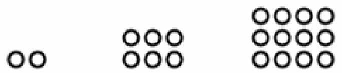

圖1　二階圖形樣式題

在此作者認為若學生能以上述策略推論出第五項為「6+6+6+6+6」，其能力已達層次 3，但此不僅反應出學生能比較連續項差異，更重要的是尚可辨認每項結構之間關係，其了解一般化如何趨近，有提昇能力到層次 4（展示出關係瞭解之證據）的潛力。因此本研究將 Orton 和 Orton（1999）描述的層次 3 又細分為 3a 及 3b，其中 3a：能比較連續項差異，層次 3b：能比較連續項差異外，尚可辨認每項結構之間關係。例如在圖 1 的樣式題中，「2，2+4=6，6+6=12，…，20+10=30」的解題屬於層次 3a 之表現，「2，3+3，4+4+4，…，6+6+6+6+6」則屬於 3b。

因此本文依據相關理論與學生實際解線性圖形樣式題表現，整合並細分 Orton 和 Orton（1999）所提出的解決樣式題之發展階段以及層次分類，而建立國小高年級學童解線性圖形樣式題能力層次，即層次 0、1、2、3a、3b、4a、4b、4c；其中 3a：能比較連續項差異；3b：能比較連續項差異外，尚可辨認每項結

構之間關係；4a：一個正確的文字描述；4b：嘗試作一個代數式；4c：一個正確的代數式（可不須簡化）。例如在圖 1 的樣式題，「長的、短的兩線組成」為層次 1（描述出部分樣式）；「每一個長的、短的依序都多 1 個」或「每一個依序差 4、6 個」為層次 2（注意一個樣式，但未推出下一項）；「2+4=6，6+6=12，12+8=20」為層次 3a；「2，2+4，2+4+6，2+4+6+8」或「2，3+3，4+4+4，5+5+5+5」為層次 3b；「第幾個圖是第幾乘以（第幾加 1）」為層次 4a；「101+101+101+…+101，加 100 次」為層次 4b；「第 n 個圖是 n×（n+1）」為層次 4c。而值得提出的是：學生已注意一個樣式，亦知如何用差距去推出下一項，但既有之經驗或計數的錯誤讓他在解題時產生未察覺之錯誤，因而未推出正確的下一項，而將其層次降低至 2。其如 Orton 和 Orton（1999）指示是有風險的。但為了判定學生的樣式能力，本文亦將採用 Orton 和 Orton 判定的準則。例如誤將形如「T」之圖形樣式視由兩等長線組成，即使知如何用差距去推出下一項，而有「3×2-1，4×2-1，5×2-1…，7×2-1」，但仍只在層次 2。

Sfard（1995）指出一般化是使得代數不同於算術的特徵之一，代數思考是將計算過程以某種整體性方式看待。相對的，算術經常是被視為一望而知的常識（common-sense），它是直接得到的結果（Usiskin, 1980）。因而 Usiskin（1999）指示「代數是被一般化的算術（Algebra as generalized arithmetic）」。換言之，代數是一般化概括之知識，它是算術的歸納。Bednarz 和 Janvier（1994）以文字題之內文去對照說明算術思考與代數思考之不同，其中「算術思考」是指直接的由已知到未知的思考，「代數思考」是指間接的透過一般化通式，由未知到已知的思考。

三、研究方法

本研究樣本是 40 位國小高年級學生，考量城鄉差距，其中 28 位來自南投縣某國小六年級的一班全體學生，12 位來自台中市某國小五年級兩班的部份學生。他們均接受八十二年版數學新課程（教育部，1993）；由於該階段學童尚未接受代數式課程，因而未正式接觸相關的樣式教材，此時以圖形樣式活動去啓蒙他們進入代數文化，正可檢驗學童解題時代數思考的自然經驗與代數知識建造的過程。樣本自小三起就接受電腦課程，具有一般電腦文書處理及上網的基本技能。為了讓樣本在網路上匿名發表，且可讓研究群辨識其身份，故每位樣本都有一代號，其中小六生之代號為三碼，如 gh1，小五生為四碼，其為三碼代號前再加上「M」，如 Mb12，以示區別。

本研究以易學易用的網路討論板當管道，去進行樣式活動。該系統屬會員制，使用者必須以自己的帳號和密碼登入；他們可以在該討論板上以文字或圖表方式張貼資料，系統則會記錄個人發表文章的內容、日期、時間及總篇數的統計等。而將數學活動移植到網路上進行，除了上網的樂趣及討論板匿名的效益外，也是讓談天說地的系統具有教育上的意義（馬秀蘭，2004；Ma, 2005；Ma & Wu, 2006）。

本研究給學生解題的素材是 8 個樣式題，其中奇數題為圖形題，偶數題為數字題；除了第二題為等比數列、第四題為費伯那齊（Fibonacci）數列、以及第五題為線性樣式外，其它五題皆為二階樣式。這些問題是研究群參考下列相關文獻所編製，如成就評比單位（Assessment of Performance Unit; APU）（undated）、Orton 和 Orton（1999）及 Hargreaves 等人（1999）的數字序列以及 Orton 等人（1999）的圖形序列等。研究群大約二至三週一次，依題目順序逐次在網路上佈題。學生利用在校午休或放學後時間到電腦教室解題。額外，研究群會針對一些解題方法表達不清或解題表現超出其數學程度的學生，去進行一對一訪談，以進一步去確認他們的想法。活動持續一學期左右。

作者透過持續比較（constant comparison）與三角交叉（triangulation）等方式來分析資料。作者將學生解題的方式或想法與剛形成的暫時性假設（例如將層次3細分為3a及3b）做持續的對照，以確定假設的合理性（例如修正層次3為3a及3b）。學生在網路討論板解題之內容及訪談紀錄為本研究在三角交叉法運用上資料之主要來源。為使本文具有信度，學童解題所涉及之能力層次、一般化與思考的分析歸類，則是採用「交互觀察者一致（interobserver agreement）」（王文科，2001）；透過兩位數學教育家（本文作者與另一位大學副教授）對原案之觀察以決定結果，期從不同分析者觀點的交叉比對，以克服研究者主觀之見解。

原案編碼採用以學生網路代號為主軸之系統編碼，五年級原案有七碼，前四碼為學生代號，第五碼為題號，最後兩碼為學生在網路發表次序之流水號；例如：Mg12-501 表示小五生 Mg12 在第五題（5）的第一個發表（01）。但若有些發表資料需要再細分成事件處理，則在編碼之後再加上英文小寫字母（a, b, c,..）以茲區別；例如：Mg12-501a 表示上述發表之第一個事件（a）。六年級原案有六碼（因小六生代號只有三碼），編碼規則與上述相同；例如：bh1-502 表示小六生 bh1 在第五題（5）的第二個發表（02）。而訪談紀錄之編碼與原案編碼完全相同，只是將學生代號後之「-」改成「~」；例如：Mg11~501 表示小五生 Mg11 在第五題（5）訪談紀錄中的第一個師生對話（01）。

四、結果與討論

本文將以第五題(線性圖形樣式題)為例去探討本文目的，其內容如圖 2 所示，學生是被要求去預測下一個、第 5、第 10、第 20 和第 100 圖，甚至第 n 圖之黑點數。以下將以 Orton 等人（1999）之圖形轉換數字的三種方法為主軸，再根據學童樣式能力高低，依序呈現學生在解第五題的 2、5、4 件原案。這 11 件原案除了代表不同之解題過程，同時也符合以下兩點條件：(一)學童在解題時，能清楚呈現出他們建立樣式的過程;(二)學童張貼在網路及晤談的兩種資料能提供研究者對他們是否可建立一般化的瞭解。每個原案中之資料是直接引自學生張貼在網路上之內容，而晤談資料只作分析時輔助之用，限於篇幅故僅擇要置於本文中。至於分析學童之能力層次則以 0、1、2、3a、3b、4a、4b、4c 為依據。在

原案中學生相似、冗長之解題內容，將以「…」取代。

圖 2　第五題樣式內容

（一）結果

1. 直接計數立即將圖形轉換為數列：

【原案 1-1】

Mg12-501a：（11-08-2001）第一個是 5，第二個是 8，第三個是 11。

Mg12-501b：11-8=3，8-5=3，所以每一個數字都相差 3。

Mg12-501c：所以 11+3=14，14+3=17，A:第五個圖形是 17 個黑點

Mg12-502 ：(12-02-2001)...以此類推。到第 100 個圖形的時候 99+3=102…

Mg12-503 ：（12-02-2001）…..到第 n 個的時候是 n+3

＜訪談紀錄＞

Mg12~501 T：以此類推是什麼意思？

Mg12~502 S：17+3=20，20+3=23，…29+3=32，每一個一直加 3。

小結：由 Mg12-501a 知 Mg12 採用直接計數法。由 Mg12-501b 知她能用差距去推論樣式之下一項。由 Mg12-501c 及 Mg12~502（訪談）知她以遞迴法，將每一個數之答案強求出來，但她只能比較連續項差異，能力在層次 3a。由 Mg12-502 及 Mg12-503 錯誤之類推，知她無製造通式之能力。

【原案 1-2】

Mb12-501a：（12-10-2001）5 個，8 個，11 個；

Mb12-501b：5+3=8，8+3=11，11+3=14，14+3=17，17+3=20，所以第五個有 20 個黑點組成 T

Mb12-501c：20*3=60，20+60=80，所以第二十個有 80 個黑點組成 T

＜訪談紀錄＞

Mb12~502 T：有沒有其它方法去求第二十個圖的黑點數？

Mb12~502 S：就是 20*3=60，20+60=80 的方法啊！

小結：由 Mb12-501a 知 Mb12 採用直接計數法。由 Mb12-501b 知他能用差距去推論樣式下一項；但他只能比較連續項差異，能力在層次 3a。由 Mb12-501c 知他以「20=5×3+5」推論「$A_{20}=A_5\times3+A_5$」之捷徑法，錯誤求出第 20 個圖之點數。由 Mb12~502 知他沒有製造通式之能力。

2. 審視新形狀需要多少更多的點：

【原案 2-1】

gm3-501a：(11-22-2001)…第一個圖到第二個圖是在 T 的三個頂點，再加上一個黑點，這樣一直加就可以知道答案了，

gm3-501b：5+3=8，8+3=11，…14+3=17，…，61+3=64，第 20 個『T』的答案是 64。

小結：由 gm3-501a 知 gm3 使用審視新形狀需要法（三頂點再加一個黑點），由 gm3-501b 之「+3」，知她能用差距去推論樣式之下一項，由「14+3=17，…61+3=64」知她以遞迴法去求出圖之點數，她只能比較連續項差異，能力在層次 3a。她至此而已，故無製造通式之能力。

【原案 2-2】

Mg11-501 ：（11-29-2001）第四個圖就是第三個圖加三個圓圈，第五個圖就是第四個圖加三個圓圈 ... ...，第二十圖就是第十九個圖加三個圓圈

Mg11-502 ：（11-30-2001）第二個是 5+3=8，第三個是 8+3=11，以此類推，一直加 3，所以第一百個數就是第 99 個數加三，所以第 n 個數就是 n 前面一個數加三。

＜訪談紀錄＞

…..

Mg11~502 S：我看到了有三個圖，每增加一個圖，原來圖的左邊、右邊以及下面就會增加一個小黑點。

小結：由 Mg11-501 及 Mg11~502 知 Mg11 採用審視新形狀需要法（左、右、下面各加一個黑點），並知以差距去推論樣式下一項。由 Mg11-502 知她是以前一個圖的個數加 3 來求下一個圖個數，她只能比較連續項差異，能力在層次 3a。再由 Mg11-502 之「第 n 個數就是 n 前面一個數加三」，知 Mg11 無製造通式之能力。

【原案 2-3】

bh3-501a：（11-22-2001）這一題的規律…是 8-5=3，所以就是每個 T+3 個黑點

bh3-501b：第一圖是 5 個
第二圖是 5+3
第三圖是 5+3+3
第四圖是 5+3+3+3
第五圖是 5+3+3+3+3
第六圖是 5+3+3+3+3+3
第七圖是 5+3+3+3+3+3+3
第八圖是 5+3+3+3+3+3+3+3
第九圖是 5+3+3+3+3+3+3+3+3
第十圖是 5+3+3+3+3+3+3+3+3+3

小結：由 bh3-501a 知 bh3 採用審視新形狀需要法（加 3 個黑點），且知如何用差距去推論樣式下一項。由 bh3-501b 知 bh3 可辨認每項結構之間關係（如第五圖是 5+3+3+3+3），故 bh3 了解一般化如何趨近，能力在層次 3b。但未歸納

之差距列式妨礙一般化的進展，讓他至此而已。

【原案 2-4】

bh5-501a：(11-15-2001）…T 的左邊和右邊和下面都加一個，加起來是三。

bh5-501b：11 在加 3 在加 3 就是第五個 T。

bh5-502a：(11-15-2001）…11 再加 3 再加 3 就是第五個 T，11 是 5 加 3 再加 3。第五個 T 是加 3 加 3 再加 3 加 3，再加原來的 5。

bh5-502b：3 乘 99 等於 297，297 加 5 等於 302，A:第一百是 302 個黑點

小結：由 bh5-501a 知 bh5 採用審視新形狀需要法(左、右、下面都加一個)，且他能用差距去推論樣式下一項。由 bh5-502a 之「第五個 T 是加 3 加 3…加原來的 5」，知他可辨認每項結構之間關係，了解一般化如何趨近。由 bh5-502b 之「3 乘 99…加 5」知 bh5 嘗試作一個代數式，能力達層次 4b。雖然 bh5 未明顯表達一個代數式 $A_n=3\times(n-1)+5$，但他已展示出關係瞭解之證據，有製造通式之能力。

【原案 2-5】

Mbm1-501a：（12-04-2001）因為圖一是五個，所以每一個圖都是加三

Mbm1-501b：圖五就是 17，第 20 個圖就是 5+19 個 3

Mbm1-502 ：（12-04-2001）第 100 個圖是 5+99 個 3，第 n 個數是 5+（n-1）個 3

＜訪談紀錄＞

…..

Mbm1~502 S：後面的 T 比它前面的 T 上面多兩個黑點，下面多一個黑點。

Mbm1~503 T：第 20 個圖為何是 5+19 個 3？

Mbm1~503 S：第 3 個是 5+2 個 3，第 4 個是 5+3 個 3，就這樣一直下去。

小結：由 Mbm1~502（訪談）知 Mbm1 採用審視新形狀需要法（上面多兩個、下面多一個)。由 Mbm1-501a 知他能用差距去推論樣式下一項。由 Mbm1~503 及 Mbm1-501b 之「5+19 個 3」知他可辨認每項結構之間關係，了解一般化如何趨近。由 Mbm1-502 之「5+99 個 3，…5+（n-1）個 3」，知他有製造通式能力，亦能表達一個正確的代數式，故能力達層次 4c。

3. 觀察圖形外形：

【原案 3-1】

Mgm1-501a：（11-29-2001）把長加兩個圈圈，再把寬都加一個圓圈圈。第一個圖加 6 個圓圈，再減 1 個圓圈，第二個圖加 8 個圓圈，再減 1 個圓圈，第三個圖加 10 個圓圈，再減 1 個圓圈，‧‧‧到第一百個圖，答案就出來了。

Mgm1-501b：第 n 個就＊n。

＜訪談紀錄＞

…..

Mgm1~505 T：為什麼加 6 個圓圈圈還要減 1 個呢？

Mgm1~506 S：…圖是由兩條等長直線組成，每一條直線上有 3 個黑點，兩條就有 6 個黑點，但是其中有一個是重複的，所以要減掉。

…..

小結：由 Mgm1-501a 和 Mgm1~506 知 Mgm1 採用觀察圖形外形之轉換法（兩條等長直線組成），且知她已注意一個樣式（如圖由兩線組成，長的黑點數逐項加一，3、4、5」，但她卻將所有圖形誤認為由等長兩線組成；她雖注意一個樣式，但未正確的推出下一項，能力在層次 2。同時由 Mgm1-501a 知她也只能以遞迴法將第 100 個圖個數強求出來；再由 Mgm1-501b 之「＊n」錯誤推論，知 Mgm1 無製造通式能力。

【原案 3-2】

Mbh1-501a：（11-07-2001）橫的每次加 2，直得每次加 1。

Mbh1-501b：第 3 個是橫 7 直 4，第 4 個是橫 9 直 5，第 5 個是橫 11 直 6，.......第 20 個是橫 41 直 21。

Mbh1-502：（12-03-2001）再把直 21 乘以 5 就是 105，再 41 乘以 5 就是 205，答案就是直 105 橫 205

＜訪談紀錄＞

Mbh1~501 T：第 5 個是橫 11 直 6？

Mbh1~502 S：因為橫的每次加 2，直得每次加 1，所以第 5 個是橫 11 是第 1 個 3 加 2 加 2 加 2 加 2，直 6 是第 1 個 2 加 1 加 1 加 1 加 1。

Mbh1~503 T：為什麼不繼續用這個方法求第 100 項？

Mbh1~502 S：沒辦法，因為加太多 2、太多 1 了。

小結：由 Mbh1-501b 知 Mbh1 採用觀察圖外形之轉換法（橫、直兩條不重疊線組成）。由 Mbh1-501a 之「加 2、加 1」，知他能用差距去推論樣式下一項。由 Mbh1~502 之「第 5 個…是第 1 個 3 加 2…」，他可辨認每項結構之間關係，了解一般化如何趨近。由 Mbh1-502 知他以「100=20×5」推論「$A_{100}=A_{20}\times5$」之捷徑法，錯誤去求第 100 項。由 Mbh1~502 之「加太多 2...1」可知未歸納的差距列式妨礙一般化的進展，能力只在層次 3b。

【原案 3-3】

gh1-501a：（11-02-2001）第一個 T 上排是 3 個，往下也是 3 個，第二則是上是 5 往下是 4 個，第三是上排 7 下 5，3.3，5.4，7.5；

gh1-501b：上排的順序應該是由 3 開始依序加 2，以 3,5,7,9,11,13,15.......；而下排是由 3 開始依序加一，3,4,5,6,7,8,9,10,11....

gh1-501c：第五的算法，上排：3+〈2x4〉等於 11，

下排：3+〈1x4〉等於 7；11+7 等於 18

第 10 的算法，上排：3+〈2x9〉等於 21，

下排：3+〈1x9〉等於 12；21+12 等於 33

gh1-502 ：（11-15-2001）100 圖的算法，3+（2x99）等於 201，
3+（1x99）等於 102，再相加。

小結：由 gh1-501a 知 gh1 是採用觀察圖外形之轉換法（重疊一點之上、下排組成）。由 gh1-501b 知 gh1 能用差距去推論樣式下一項，且由「上排…下排」的解題法，知她了解一般化如何趨近。由 gh1-501c 和 gh1-502 之「3+（2x99）…3+（1x99）…」知 gh1 嘗試作一個代數式，雖然她在解題中未明顯表達代數式，如 $A_n=3+2\times(n-1)$ 及 $B_n=3+1\times(n-1)$，但她已展示出關係瞭解之證據，有製造通式之能力，能力達層次 4b。其中雖然 gh1 忽略要將重疊的一點扣除，如 gh1-502 之 100 圖應該是「201+102-1」，但因本研究重視學童知識建造的過程，而非答案，故不影響其表現。

【原案 3-4】

Mgh2-501a：（11-07-2001）第一個 T 是 5 個也就是 1.1.3，第二個 T 是 8 個也就是 2.2.4，第三個 T 是 11 也就是 3.3.5，一直下去 4.4.6，5.5.7。

Mgh2-501b： …第一個數是 T 左邊的點，第二個數是 T 右邊的點，第三個數是 T 下面的點。

Mgh2-502a：(11-15-2001）第 5 個 T 是 5.5.7，有 17 個點，第 6 個 T 是 6.6.8。所以第 10 個 T 是 10.10.12，有 32 個點，第 20 個 T 是 20.20.22，有 62 個點，以此類推到第 100 個就是 100.100.102，有 302 個點。

Mgh2-502b：它們是 3 倍又 2。

＜訪談紀錄＞

Mgh2~501 T：為什麼你知道第 20 個 T 是 20.20.22 呢？

Mgh2~502 S：因為 T 左邊的點、右邊的點恰好和第幾個 T 的第幾相同，下面的點則是第幾個加二。

Mgh2~503 T：為什麼是 3 倍又 2？

Mgh2~504 S：因為第 10 個 T 有 32 個點，第 20 個 T 有 62 個點，第 100 個 T 有 302 個點，它們是第幾個 T 的第幾乘 3 加 2。

小結：由 Mgh2-501a 及 502a 知 Mgh2 採用觀察圖外形之轉換法（左、右邊和下面的點組成），並知她能用 3 個差距（1、1、2）去推論樣式下一項，如 5.5.7、6.6.8，此分析式思維透露出 Mgh2 了解一般化如何趨近。由 Mgh2~502 之「T 左邊的點、右邊…下面…」知 Mgh2 展示一個正確的文字描述，能力達層次 4a。再由 Mgh2-502b 之「3 倍又 2」，知她嘗試作一個代數式，雖然她在解題中未明顯表達代數式，如 $A_n=B_n=n$ 及 $C_n=n+2$，或 $A_n+B_n+C_n=3n+2$，但她已展示出關係瞭解之證據，有製造通式之能力，樣式能力達層次 4b。

（二）討論

1. 圖形到數字樣式之轉換法與能力層次之關係

（1）使用直接計數立即將圖形轉換為數列之學童能力層次最高只有 3a。因

學童直接計算點數，故忽略圖形的結構或外觀，他們必須靠轉換得到之數列 5, 8, 11,…去解題。但國小高年級生尚未正式接觸數列之教材，因此導致所有使用此法學生會因以下情況而妨礙代數知識建造之進展：(1)依戀使用遞迴法去趨近答案，只注意解題答案，阻礙一般化進展；如【原案 1-1】Mg12 之「5+3=8，8+3=11，…到第 100 個…99+3=102…」。(2) 使用不正確的捷徑法，如【原案 1-2】Mb12 先以遞迴方式求出第五個圖的點數 (A_5)，再以錯誤之捷徑法($A_5 \times 3+A_5$)求 A_{20}。他倆只能比較連續項差異，層次 3a。

（2）使用審視新形狀需要多少點的學童是以「幾何趨近」方式解題，**能力層次最高 4，至少 3a，關鍵在於是否注意每一個新圖是連續增加幾個差距。**如【原案 2-3】bh3 審視每個新圖+3 個點，而顯示「5，5+3，5+3+3，…5+3+3+3+3+3+3+3+3+3」過程；【原案 2-4】bh5 審視新 T 的左、右邊和下面都加一個，加起來是三，由「第五個 T 是加 3 加 3 在加 3 加 3，在加原來的 5」，而推論出「第一百 T 是 3 乘 99 等於 297，297 加 5」；【原案 2-5】Mbm1 審視新圖上、下各多兩個、一個點，由「第 3 個是 5+2 個 3，第 4 個是 5+3 個 3…」，而推論出「第 n 個數是 5+（n-1）個 3」。三位的能力各達層次 3b、4b 和 4c，他們皆注意每一個新圖是連續增加幾個差距，即可辨認每項結構之間關係。相反的如【原案 2-1】gm3 雖然審視新 T 的三項點再加上一個點，但她卻只注意每一個新圖加了 3 之後的個數（5+3=8，8+3=11，…，31+3=34），即只能比較連續項差異，層次只有 3a。

（3）使用觀察圖外形之學童是以「幾何趨近」方式解題，**能力層次最高 4，至少 3b，關鍵在於是否關注每一個新圖是連續增加幾個差距。**如【原案 3-3】gh1 觀察 T 形是由重疊一點之上排和下排組成，且各由 3 開始依序加 2、加 1，而推論出「第 100 圖，3+（2×99）…3+（1×99）…再相加」；層次 4b。【原案 3-4】Mgh2 觀察 T 形是由左邊、右邊和下面的點組成，由「1.1.3，…2.2.4，…3.3.5，…」推論出「第 100 個就是 100.100.102」，層次 4b。gh1 和 Mgh2 都注意子序列中每一個新圖是連續增加幾個差距。然而學生看圖的失誤、捷徑法或未歸納之差距皆會妨礙其代數知識建造之進展，如【原案 3-1】Mgm1 誤將所有圖看成是由兩條等長線構成，她雖注意一個樣式，但未推出正確的下一項，只有層次 2。【原案 3-2】Mbh1 先以分析式思維（如第 5 個…是第 1 個 3 加 2 加 2…）求出 A_{20}，層次 3b；但他再以錯誤之捷徑法「$A_{20} \times 5$」去求 A_{100}，加上未歸納之差距列式也阻礙一般化的進展。

2. 樣式能力層次與代數思考之關係

（1）層次 0、1 或 2：

樣式沒有一點進展或描述出(部分)樣式，因皆未推出樣式之下一項，故尚未具有一般化相關知識，未涉及代數思考。如【原案 3-1】Mgm1 不只誤將「T」圖看成是由兩等長線組成，且她只能由已知數（如 6、8、10 個，減 1 個），以遞迴法將未知圖形(如第 100 個圖)個數強求出來；此直接的由已知到未知的思考，即是「算術思考」。

（2）層次 3（知如何用差距去推出下一項）：

層次 3a 者只能比較連續項差異，如【原案 2】Mg12、【原案 3】Mb12、與【原案 2-1】gm3 之 5+3=8，8+3=11，…14+3=17，或【原案 2-2】Mg11 之第五個圖就是第四個圖加三個圓圈；他們雖能用差距去推出下一項，但卻是以遞迴法去強求每一個圖之個數，而不了解該樣式是如何趨近一般化。最後 Mg12 之「第 n 個 T 是 n+3」及 Mg11 之「第 n 個數就是 n 前面一個數加三」反應出他們無製造通式能力。因此層次 3a 者不知一般化如何趨近，也無製造通式之能力。他們只能由已知數（如首項 5 及差距 3），以遞迴法將未知圖形個數強求出來；此直接的由已知到未知的思考，即是「算術思考」。

層次 3b 者能比較連續項差異外，尚可辨認每項結構之間關係，如【原案 2-3】bh3 之 5，5+3，5+3+3，5+3+3+3…，或【原案 3-2】Mbh1 之第 5 個橫的是 3 加 2 加 2…直的是 2 加 1 加 1…。他們了解一般化如何趨近，但尚未歸納之差距列式卻妨礙一般化的進展，他們尚未有製造通式之能力。他們能透過已知數（如首項 5 及差距 3），以遞迴法將未知圖形之個數強求出來，涉及「算術思考」。但是他們的解題過程是足夠讓人了解其想法，他們是有潛力去思索一般化的形式，只是缺了該步驟而已，因而是易於被引導去發展函數概念，而有代數思考（如 bh3 之第 1 圖：5，第 2 圖：5+3，第 3 圖：5+3x2，…第 10 圖：5+3x9）。因此層次 3b 者具有製造一般化通式之「潛力」，此潛力能使他們有機會去透過一般化通式，將遠處未知圖形個數變為已知數，此表示他們具有「代數思考」之雛形，因此層次 3b 的學生正值了解一般化如何趨近之「算術-代數思考之過渡期（transition）」。

（3）層次 4（能展示出關係瞭解之證據）：

層次 4a 者能作正確文字描述，如【原案 3-4】Mgh2 能說明 T 左、右邊的點恰好和第幾個 T 的第幾相同，下面的點則是第幾個加二。層次 4b 者能作代數式的嘗試，如【原案 2-4】bh5 之第一百是 3 乘 99 等於 297，297 加 5 等於 302，或【原案 3-3】gh1 之第 100 圖，3+（2x99）等於 201，3+（1x99）等於 102，再相加，或【原案 3-4】Mgh2 之 3 倍又 2。層次 4c 者能作正確的代數式，如【原案 2-5】Mbm1 之第 n 個數是 5+（n-1）個 3。因此層次 4 之學生了解樣式中任何項之數量和該項位置之間存在某種關係（函數概念），有製造一般化通式能力。他們在處理遠處問題時，不是直接靠遞迴法強求，而是間接透過一般化通式之關係（如上述文字描述或代數式），將遠處未知圖形個數求出變為已知數；此間接的透過一般化通式，由未知到已知的思考，即是「代數思考」。因此層次 4 之學生具有「代數思考」。

五、結論

本文以相關理論與學生實際解線性圖形樣式題表現，整合並細分 Orton 和 Orton（1999）所提出的解決樣式題之發展階段以及層次分類，而建立國小高年級學童解線性圖形樣式題能力層次，即層次 0，1，2，3a，3b，4a，4b，4c。研究發現如下：

（一）當以圖形樣式活動去啓蒙學生進入代數文化時（即學童尚未正式接觸相關的樣式教材），學童將圖形轉換到數字樣式的方法會影響其樣式能力與代數思考。其中依戀使用遞迴法或使用錯誤的捷徑法等，都會阻礙學生代數知識的建構。若學生立即將圖形轉化為數字再尋找差距，他們只能直接以遞迴法，將前幾項之個數強求出來，能力層次最高只有 3a。若學生直接由圖形中尋找差距，包括審視新形狀需要多少點及觀察圖形外形的轉換法，則他們有機會去注意每一個新的圖形是連續增加幾個差距，能力層次易達 4，至少 3a。因此若學童是以「幾何趨近」的轉換法解題，其中關注每一個新圖是連續增加幾個差距的分析性思維，有助於樣式能力提昇及代數思考產生。它證實了 Bednarz, Kieran 和 Lee（1996）的指示，某種幾何趨近對在代數學習中發生之分析性思維似乎是一個可能之先驅；它也驗證 Ma（2007）的發現，若學童以幾何趨近方式解題，他們將有發展一般化的潛力，因他們知覺一個「對代數發展有用的樣式」。

（二）高年級學童由樣式能力層次 3a 之算術思考，演進到樣式層次 3b 了解一般化如何趨近的算術-代數思考之過渡期，最後才提昇到樣式層次 4 有製造一般化通式能力之代數思考。

由於本文乃探索性研究，因此建議未來有嚴謹設計之後續研究者可利用本文結果去進行大樣本之檢測。

誌　謝

本研究承蒙國科會專題研究計畫經費補助（NSC 90-2521-S-275-001），計劃主持人：馬秀蘭，特此致謝。

參考文獻

王文科（2001）：**教育研究法**。台北市：五南圖書。

馬秀蘭（2003）：**透過 BBS 學習代數推理-以樣式為工具**。論文發表於國立中央大學舉辦之「2003 數學學術研討會」發表會，中壢市。

馬秀蘭（2004）：數學乘除問題情境發展之研究--以 BBS 為管道。**科學教育學刊，12**（1），53-81。

教育部（1993）：**國民小學課程標準**。臺北市：教育部。

葉李華（譯）（1996）：Ian Stewart著。**大自然的數學遊戲**。台北市：天下文化。

Assessment of Performance Unit (undated). *Mathematical development; a review of monitoring in mathematics 1978 to 1982*. Slough; NFER.

Bednarz, N., & Janvier, B. (1994). The emergence and development of algebra in a problem solving context: An analysis of problems. In J. P. da Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*

(Vol. II, pp. 64-71). Lisbon, Portugal: PME.

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching. In N. Bednarz,, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), A*pproaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 3-12). Kluwer Academic Publishers.

Biggs, E., & Shaw, K. (1985). *Maths alive!* London: Cassell.

English, L. D., & Warren, E. A. (1999). Introducing the variable through patter exploration. In B. Moses(Ed.), *Algebraic thinking, grades K-12* (pp. 140-145). Reston, VA: NCTM.

Hargreaves, M., Threlfall, J. ,Frobisher, L. & Shorrocks-Taylor, D. (1999). Children' s Strategies with Linear and Quadratic Sequences. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics*, 67-83. Wellington House, London: Cassell.

Herbert, K., & Brown, R. H. (1997). Patterns as tools for algebraic reasoning. *Teaching Children Mathematics*, *3*(6), 340-344.

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 87-106). Kluwer Academic Publishers.

Ma, H. L. (2005, May). *Bulletin board systems—another supporting channel for helping students work on mathematics*. Paper presented at International Conference on Education, Redesigning Pedagogy. National Institute of Education, Nanyang Technological University, Singapore.

Ma, H. L. (2007). The potential of patterning activities to generalization. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Aeo (Eds.). *Proc. of 31th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, p. 225-232). Seoul, Korea: PME.

Ma, H. L., & Wu, D. B. (2006). The role of pattern in the algebraic concept learning via internet. In G.. Dhompongsa, F. M. Bhatti, & Q. Kristen (Eds.). *Proc. of Thailand International Conference on 21st Century Information Technology in Mathematics Education* (pp. 143-150). Chiang Mai, Thailand.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D., & Gowar, N. (1985). *Routes to/roots of algebra*. Milton Keynes, UK: Open University Press.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston , VA: NCTM.

Naylor, M. (2002). Who Am I? *Teaching PreK-8, 32*(4), 40-41. Orlando, FL: Academic Press.

National Research Council. (1989). *Everybody counts: A report to the nation on the future of mathematics education*. Washington, DC: National Academy Press.

Orton, A., & Orton, J. (1999). Pattern and the approach to algebra. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 104-120). London: Cassell.

Orton, J., Orton, A., & Roper, T. (1999). Pictorial and practical contexts and the perception of pattern. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 121-136). London: Cassell.

Usiskin, Z. (1980). What should not be in the algebra and geometry curricula of average college-bound students? *Mathematics Teacher*, 73, 413-424.

Usiskin, Z. (1999). Conceptions of school algebra and uses of variable. In B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking, grades K-12* (pp. 7-13). Reston, Virginia: NCTM.

The Algebraic Thinking of Upper-grade Students to Solve Linear Patterns with Pictorial Contents

Hsiu-Lan Ma

Department of Business Administration,Ling Tung University

ABSTRACT

The purpose of this article was to explore the algebraic thinking of 40 upper-grade students to solve linear patterns with pictorial contents. It could be a reference to introduce algebra to students through patterning activities within pictorial contexts. The researcher combined and revised the stage and level of children's patterning abilities, suggested by Orton and Orton (1999). She established the levels about upper graders solving linear patterns with pictorial contents. They were 0, 1, 2, 3a, 3b, 4a, 4b, 4c. The findings were: (1) The analytic thinking contributed to promoting patterning abilities and producing algebra thinking, if the students in converting pictures to numbers applied geometric approaches to solve problems and they paid attention to increases how many differences in succession each new shape requires. (2) The student was from the level 3a, arithmetic thinking, to the level 3b, arithmetic-algebra thinking transition with understanding generality approach, and lastly to the level 4, algebra thinking with the ability making in general rule. These results of the exploray research will provide researcher who rigiorly design to test based on big sample in the future.

Key words: generality, algebraic thinking, upper-grade students, linear patterns with pictorial content